# Lineare Algebra 2

Philipp Grohs

LaTeX-Satz: Anton Mosich

Sommersemester 2022

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Determinanten

## 1.1 Permutationen

**Definition 1.1.1:**
Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, [n] := \{1, 2, \dots, n\}$.
Eine bijektive Abbildung $\pi \colon [n] \to [n]$ heißt Permutation von $[n]$. Wir definieren die symmetrische Gruppe $S_n := \{\pi \text{ Permutation von } [n]\}$ mit der Hintereinanderausführung als Gruppenoperation.

**Bemerkung**

- $(S_n, \circ)$ ist eine Gruppe.
- $\pi \in S_n$ ist eindeutig durch das Tupel $(\pi(1), \dots, \pi(n))$ definiert.
- Fixpunkte $(\pi(i) = i)$ werden oft weggelassen.

**Definition 1.1.2:**
$\pi \in S_n$ heißt Transposition wenn es $i, j \in [n]$ gibt mit

$$\pi(k) = \begin{cases} k & k \notin \{i, j\} \\ i & k = j \\ j & k = i \end{cases}$$

Wir schreiben $\pi = (ij)$.

**Satz 1.1.3:**
Es gilt $|S_n| = n!$.

*Beweis.* Vollständige Induktion

$n = 1$: $S_1 = \{\mathrm{id}\} \implies |S_1| = 1 = 1!$

$n-1 \to n$: Angenommen $|S_{n-1}| = (n-1)!$. Dann gilt $|\{\pi \in S_n \colon \pi(n) = n\}| = (n-1)!$. Sei allgemein $i \in [n]$. Dann gilt $\pi(n) = i \iff (in) \circ \pi(n) = n$. Also gilt

$$\begin{aligned} &|\{\pi \in S_n \colon \pi(n) = i\}| = |\{(in) \circ \pi \colon \pi(n) = n\}| \\ &= |\{\pi \colon \pi(n) = n\}| = (n-1)! \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} &S_n = \dot{\bigcup_{i \in [n]}} \{\pi \in S_n \colon \pi(n) = i\} \implies \\ &|S_n| = \sum_{i \in [n]} |\{\pi \in S_n \colon \pi(n) = i\}| = n \cdot (n-1)! = n! \end{aligned}$$

□

**Satz 1.1.4:**
Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist jedes $\pi \in S_n$ das Produkt von (endlich vielen) Transpositionen.

*Beweis.* Vollständige Induktion

$n = 2$: $S_2 = \{\mathrm{id}, (21)\}$

$n-1 \to n$: Sei $\pi \in S_n$. Dann gilt (siehe Beweis von Satz 1.1.3) mit $i = \pi(n)$, dass

$$\underbrace{(in)\pi}_{\pi_i}(n) = n$$

Sei $\pi_i = (\underbrace{\pi_i(1) \ldots \pi_i(n-1)}_{\in S_{n-1}}\, n) \underset{\text{Induktions VS}}{\implies} \pi_i = (i_1 j_1) \ldots (i_k j_k)$.
Außerdem gilt $\pi = (in)\pi_i$, also $\pi = (in)(i_1 j_1) \ldots (i_k j_k)$ □

**Bemerkung**

- Produktdarstellung ist nicht eindeutig, zum Beispiel:

$$(312) = (21)(31) = (31)(32)$$

- $f \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n], \pi \in S_n$
  $\pi f(X_1, \ldots, X_n) := f(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(n)})$

**Beispiel**

$\pi = (231), f(X_1, X_2, X_3) = X_1 - X_2 + X_1 X_3 \implies \pi f(X_1, X_2, X_3) = X_2 - X_3 + X_2 X_1$

**Lemma 1.1.5:**

Sei

$$f(X_1,\dots,X_n) = \prod_{\substack{i,j\in[n]\\ i<j}} (X_j - X_i) \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$$

Dann gilt

a) Zu jedem $\pi \in S_n$ existiert eine eindeutig Zahl $s(\pi) \in \{-1,1\}$ mit $\pi f = s(\pi) f$.

b) Für $\pi$ eine Transposition gilt $s(\pi) = -1$.

*Beweis.* a)

$$\begin{aligned}
\pi f(X_1,\dots,X_n) &= \prod_{i<j} (X_{\pi(j)} - X_{\pi(i)}) \\
&= \Bigg( \prod_{\substack{i<j\\ \pi(i)<\pi(j)}} (X_{\pi(j)} - X_{\pi(i)})\Bigg)\Bigg( \prod_{\substack{i<j\\ \pi(j)<\pi(i)}} (X_{\pi(j)} - X_{\pi(i)})\Bigg) \\
&= (-1)^{|\{(i,j)\in[n]\times[n]\colon i<j \wedge \pi(i)>\pi(j)\}|} \prod_{i<j} (X_j - X_i) \\
&= s(\pi) f(X_1,\dots,X_n) \text{ mit} \\
s(\pi) &= (-1)^{|\{(i,j)\in[n]\times[n]\colon i<j \wedge \pi(i)>\pi(j)\}|}
\end{aligned}$$

b) $\pi = (ij), i<j, k \in \{i+1,\dots,j-1\}\colon \pi(i,j) = (j,i), \pi(i,k) = (j,k), \pi(k,j) = (k,i)$
Für diese Paare gilt $x < y \wedge \pi(x) > \pi(y)$
Für alle anderen Paare gilt $x < y \wedge \pi(x) < \pi(y)$
Erstere sind $2(j-i-1)+1$ Paare. Daraus folgt $\pi f = (-1)^{2(j-i-1)+1} f$, also $s(\pi) = -1$.
□

**Definition 1.1.6:**

- Die durch Lemma 1.1.5 bestimmte Größe $s(\pi)$ heißt Signum von $\pi \in S_n$. Wir schreiben $\operatorname{sgn}(\pi)$.
- $\pi$ heißt gerade falls $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$ und ungerade falls $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$.

**Satz 1.1.7:**

Für $\pi, \sigma \in S_n$ gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma\pi) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\pi)$$

*Beweis.* Nach Satz 1.1.5(a) gilt:

$$f(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i<j}(X_j - X_i) \implies$$
$$\sigma\pi f(X_1, \dots, X_n) = \operatorname{sgn}(\sigma\pi) f(X_1, \dots, X_n)$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}\sigma\pi f(X_1, \dots, X_n) &= \sigma[\pi f(X_1, \dots, X_n)] \\ &= \sigma[\operatorname{sgn}(\pi) f(X_1, \dots, X_n)] \\ &= \operatorname{sgn}(\pi)\sigma f(X_1, \dots, X_n) \\ &= \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\sigma) f(X_1, \dots, X_n)\end{aligned}$$ □

**Satz 1.1.8:**

a) $\operatorname{sgn}(\pi) = 1 \iff \pi$ ist Produkt gerader Anzahl Transpositionen

b) $\pi$ Produkt von k Transpositionen $\implies \operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^k$

*Beweis.* Folgt direkt aus Satz 1.1.5(b) und Satz 1.1.7 □

**Folgerung 1.1.9:**
Es gibt genau $\frac{1}{2}n!$ gerade und $\frac{1}{2}n!$ ungerade Permutationen in $S_n$

*Beweis.* Folgt aus Satz 1.1.3 □

**Definition 1.1.10:**
Die geraden Permutationen bilden eine Untergruppe $A_n$ von $S_n$, die man <u>alternierende Gruppe</u> nennt.

## 1.2 Multilinearformen

**Definition 1.2.1:**
Seien $V_1, \dots, V_n, W$ $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi \colon V_1 \times \dots \times V_n \to W$ heißt <u>n-linear</u>, wenn für alle $v_1, v_1' \in V_1, \dots, v_n, v_n' \in V_n, i \in [n], \lambda \in \mathbb{K}$ gilt, dass

- $\varphi(v_1, \dots, v_i + v_i', \dots, v_n) = \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \varphi(v_1, \dots, v_i', \dots, v_n)$
- $\varphi(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) = \lambda\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$.

Ist $W = \mathbb{K}$ und $V_1, \dots, V_n = V$, so heißt $\varphi$ <u>n-Linearform</u>.
($n = 2 \to$ <u>Bilinearform</u>)

**Beispiel**

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 & \to \mathbb{K} \\ \left( \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right) & \mapsto a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{cases}$$

**Definition 1.2.2:**

Eine n-Linearform von $V$ heißt

- nicht ausgeartet, falls $(a_1, \ldots, a_n) \in V \times \cdots \times V$ existiert mit $\varphi(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.
- alternierend, falls $\varphi(a_1, \ldots, a_n) = 0$ für $a_1, \ldots, a_n$ linear abhängig.

**Bemerkung**

$\varphi$ alternierend und $a_i = a_j$ für $i \neq j \implies \varphi(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

**Lemma 1.2.3:**

Sei $\varphi$ alternierende n-Linearform von V und $\pi \in S_n$. Dann gilt für $a_1, \ldots, a_n \in V$:

$$\varphi\left(a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}\right) = \operatorname{sgn}(\pi)\varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

*Beweis.* Wegen Satz 1.1.4 und Satz 1.1.7 genügt es anzunehmen, dass $\pi$ Transposition ist. Sei also $\pi = (ij)$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(a_1, \ldots, \underbrace{a_i + a_j}_{i}, \ldots, \underbrace{a_i + a_j}_{j}, \ldots, a_n) \\ &= \underbrace{\varphi(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}_{0} + \underbrace{\varphi(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}_{0} \\ &\quad + \varphi(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) + \varphi(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n) \\ &\implies \varphi(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = \underbrace{(-1)}_{=\operatorname{sgn}\pi} \varphi(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

□

**Lemma 1.2.4:**

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-VR mit $\dim(V) = n$ und $\varphi$ nicht ausgeartete und alternierende n-Linearform von V. Dann gilt

$$a_1, \ldots, a_n \text{ linear abhängig} \iff \varphi(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

*Beweis.* $\Longrightarrow$ : folgt aus Definition 1.2.2

$\Longleftarrow$ : z.Z.: $\varphi(b_1, \dots, b_n) \neq 0 \;\Longleftarrow\; b_1, \dots, b_n$ Basis von $V$. Da $\varphi$ nicht ausgeartet ist, gibt es $a_1, \dots, a_n \in V$ mit $\varphi(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

Da $b_1, \dots, b_n$ Basis gibt es $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$ mit $a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij} b_j$

Wegen n-Linearität gilt

$$
\begin{aligned}
0 \neq \varphi(a_1, \dots, a_n) &= \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_n=1}^{n} \varphi(b_{j_1}, \dots, b_{j_n}) \lambda_{1j_1} \cdots \lambda_{nj_n} \\
&\underbrace{=}_{\varphi \text{ alternierend}} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \\ \text{paarweise verschieden}}} \varphi(b_{j_1}, \dots, b_{j_n}) \lambda_{1j_1} \cdots \lambda_{nj_n} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \varphi(b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(n)}) \lambda_{1\pi(1)} \cdots \lambda_{n\pi(n)} \\
&\underbrace{=}_{\text{Lemma 1.2.3}} \varphi(b_1, \dots, b_n) \left( \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \lambda_{1\pi(1)} \cdots \lambda_{n\pi(n)} \right) \\
&\Longrightarrow \varphi(b_1, \dots, b_n) \neq 0
\end{aligned}
$$

□

**Satz 1.2.5:**

Sei V $\mathbb{K}$-VR mit $\dim(V) = n$ und Basis $a_1, \dots, a_n$.

a) Für $\varphi$ alternierende nicht ausgeartete n-Linearform gilt für $b_i = \sum \lambda_{ij} a_j$, dass

$$\varphi(b_1, \dots, b_n) = \varphi(a_1, \dots, a_n) \left( \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \lambda_{1\pi(1)} \cdots \lambda_{n\pi(n)} \right)$$

b) Sei $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi(b_1, \dots, b_n) = c \left( \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \lambda_{1\pi(1)} \cdots \lambda_{n\pi(n)} \right)$$

eine alternierende nicht ausgeartete n-Linearform.

*Beweis.* a) folgt aus dem Beweis von Lemma 1.2.4.

b) Man verifiziert leicht, dass $\varphi$ n-linear ist. Weiters ist $\varphi$ nicht ausgeartet, da

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = c \left( \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \delta_{1\pi(1)} \cdots \delta_{n\pi(n)} \right) = c \cdot 1 \neq 0$$

z.Z.: $\varphi$ alternierend. Seien $b_1, \dots, b_n$ linear abhängig.
O.B.d.A. $b_1 = \mu_2 b_2 + \cdots + \mu_n b_n$. Dann gilt

$$\varphi(b_1, \dots, b_n) = \sum_{j=2}^{n} \mu_j \varphi(b_j, b_2, \dots, b_n)$$

Es genügt also zu zeigen, dass $\varphi(b_1, \dots, b_n) = 0$ falls $b_1 = b_i, i \in \{2, \dots, n\}$. Dann gilt aber $\lambda_{1j} = \lambda_{ij} \forall j$.

$$\begin{aligned}\varphi(b_i, \dots, b_i, \dots, b_n) &= c \cdot \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \lambda_{i\pi(1)} \cdots \lambda_{i\pi(i)} \cdots \lambda_{n\pi(n)} \\ &= c \cdot \left( \sum_{\pi \in A_n} \operatorname{sgn}(\pi) \lambda_{i\pi(i)} \cdots \lambda_{i\pi(i)} \cdots \lambda_{n\pi(n)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\pi \in A_n} \underbrace{\operatorname{sgn}(\pi \circ (1i))}_{= -\operatorname{sgn}(\pi)} \lambda_{i\pi(i)} \cdots \lambda_{i\pi(i)} \cdots \lambda_{n\pi(n)} \right) \\ &= c \cdot \sum_{\pi \in A_n} (\operatorname{sgn}(\pi) - \operatorname{sgn}(\pi)) \cdot \lambda_{i\pi(i)} \cdot \\ &\qquad \cdots \lambda_{i\pi(i)} \cdots \lambda_{n\pi(n)} = 0\end{aligned}$$

□

**Bemerkung**

Es gibt also zu jedem $\mathbb{K}$-VR V mit $\dim(V) = n$ eine nicht ausgeartete alternierende n-Linearform.

**Satz 1.2.6:**
Sei V $\mathbb{K}$-VR mit $\dim(V) = n$ und $\varphi_1, \varphi_2$ nicht ausgeartete alternierende n-Linearformen. Dann existiert $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $\varphi_2 = c \cdot \varphi_1$.

*Beweis.* Sei $a_1, \dots, a_n$ Basis von V. Nach Lemma 1.2.4 ist $\varphi_i(a_1, \dots, a_n) \neq 0, i = 1, 2$.
Sei $c := \dfrac{\varphi_1(a_1, \dots, a_n)}{\varphi_2(a_1, \dots, a_n)} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
Sei $b_1, \dots, b_n$ mit $b_i = \sum \lambda_{ij} a_j$.
Dann gilt nach Satz 1.2.5(a), dass für $i = 1, 2$

$$\varphi_i(b_1, \dots, b_n) = \varphi_i(a_1, \dots, a_n) \underbrace{\sum_{\pi \in S_n} \lambda_{1\pi(1)} \cdots \lambda_{n\pi(n)}}_{\text{unabhängig von } i!}$$

$$\Longrightarrow \frac{\varphi_1(b_1, \dots, b_n)}{\varphi_2(b_1, \dots, b_n)} = \frac{\varphi_1(a_1, \dots, a_n)}{\varphi_2(a_1, \dots, a_n)} = c$$

□

## 1.3 Determinanten

**Definition 1.3.1:**

Sei $B = (a_1, \ldots, a_n)$ Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Sei $\varphi$ nicht ausgeartete n-Linearform und $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$. Dann ist die Determinante von $\alpha$ definiert durch

$$\det(\alpha) := \det{}_{\mathbb{K}}(\alpha) := \frac{\varphi(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))}{\varphi(a_1, \ldots, a_n)}$$

**Satz 1.3.2:**

$\det(\alpha)$ ist unabhängig von der Wahl der Basis B und der Form $\varphi$.

*Beweis.*

1. Fall: $\alpha$ nicht bijektiv
   $\implies \alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)$ linear abhängig $\implies \det(\alpha) = 0$

2. Fall: $\alpha$ bijektiv. Sei $B = (a_1, \ldots, a_n)$.

   Dann ist auch $\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)$ Basis und, da $\varphi$ nicht ausgeartet,

   $$\varphi(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) \neq 0$$

   Sei $\varphi_\alpha(b_1, \ldots, b_n) := \varphi(\alpha(b_1), \ldots, \alpha(b_n))$. Dann ist $\varphi_\alpha$ alternierend und nicht ausgeartet. Wegen Satz 1.2.6 folgt, dass $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existiert mit

   $$\varphi_\alpha = c \cdot \varphi \tag{1.1}$$

   und (durch Einsetzen von $a_1, \ldots, a_n$), dass $c = \det(\alpha)$. Da 1.1 unabhängig von B ist also $\det(\alpha)$ unabhängig von B.

   Sei nun $\psi$ eine zweite alternierende, nicht ausgeartete n-Form und $\psi_\alpha(b_1, \ldots, b_n) := \psi(\alpha(b_1), \ldots, \alpha(b_n))$. Dann ist $\psi_\alpha$ alternierend und nicht ausgeartet. Nach Satz 1.2.6 gibt es $d \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $d = \frac{\psi}{\varphi}$. Also gilt:

   $$\det(\alpha) = \frac{\varphi_\alpha(a_1, \ldots, a_n)}{\varphi(a_1, \ldots, a_n)} = \frac{d\varphi_\alpha(a_1, \ldots, a_n)}{d\varphi(a_1, \ldots, a_n)} = \frac{\psi_\alpha(a_1, \ldots, a_n)}{\psi(a_1, \ldots, a_n)}$$

   also ist $\det(\alpha)$ auch von der n-Form unabhängig. □

**Korollar 1.3.3:**

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gilt

a) $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ bijektiv $\iff \det(\alpha) \neq 0$

b) $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V) \implies \det(\alpha\beta) = \det(\alpha)\det(\beta)$

c) $\det(\mathrm{id}) = 1$

d) Ist $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ invertierbar, so gilt $\det(\alpha^{-1}) = \det(\alpha)^{-1}$.

*Beweis.* Sei $B = (a_1, \dots, a_n)$ Basis und $\varphi$ n-Form mit

$$\det(\alpha) = \frac{\varphi(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))}{\varphi(a_1, \dots, a_n)} [\text{ unabhängig von } B \text{ und } \varphi \text{ nach Satz 1.3.2}]$$

a) $\alpha$ bijektiv $\iff \alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)$ linear unabhängig
$\underbrace{\iff}_{\text{Lemma 1.2.4}} \varphi(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \neq 0 \iff \det(\alpha) \neq 0$

b) 2 Fälle:

1. Fall: $\alpha$ oder $\beta$ ist nicht bijektiv: o.B.d.A $\alpha$ nicht bijektiv.
$\implies \det(\alpha) = 0 \implies \det(\alpha)\det(\beta) = 0$
Weiters folgt, dass $\alpha\beta$ nicht bijektiv, also $\det(\alpha\beta) = 0$.

2. Fall: $\alpha, \beta$ bijektiv. Dann ist auch $(\beta(a_1), \dots, \beta(a_n))$ Basis und

$$\begin{aligned}
\det(\alpha\beta) &= \frac{\varphi(\alpha(\beta(a_1)), \dots, \alpha(\beta(a_n)))}{\varphi(a_1, \dots, a_n)} \\
&= \frac{\varphi(\alpha(\beta(a_1)), \dots, \alpha(\beta(a_n)))}{\varphi(\beta(a_1), \dots, \beta(a_n))} \cdot \frac{\varphi(\beta(a_1), \dots, \beta(a_n))}{\varphi(a_1, \dots, a_n)} \\
&\underbrace{=}_{\text{Satz 1.3.2}} \det(\alpha)\det(\beta)
\end{aligned}$$

c) $\det(\mathrm{id}) = \frac{\varphi(a_1, \dots, a_n)}{\varphi(a_1, \dots, a_n)} = 1$

d) $1 \underbrace{=}_{\text{c)}} \det(\mathrm{id}) = \det(\alpha\alpha^{-1}) \underbrace{=}_{\text{b)}} \det(\alpha)\det(\alpha^{-1})$ □

**Satz 1.3.4:**
Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V), B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis und $A = (a_{ij}) = {}_B M(\alpha)_B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann gilt

$$\det(\alpha) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

*Beweis.* Es gilt $\alpha(b_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} b_j$ für $i = 1, \dots, n$. Nach Satz 1.2.5(a) gilt

$$\varphi(\alpha(b_1), \dots, \alpha(b_n)) = \varphi(b_1, \dots, b_n) \cdot \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

und daraus folgt die Behauptung direkt. $\square$

**Definition 1.3.5:**

Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definieren wir die <u>Determinante von A</u> als

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \in \mathbb{K}$$

**Bemerkung**

Schreibweise für $A = (a_{ij})$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## 1.4 Rechenregeln

**Satz 1.4.1:**

Sei $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann gilt

a) $\det(A) = \det(A^T)$

b) $\forall i, j \in [n] \colon i < j \colon \det((a_1, \dots, \underbrace{a_j}_{i}, \dots, \underbrace{a_i}_{j}, \dots, a_n)) = -\det(A)$

c) $\forall i \in [n] \colon \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \colon \det((a_1, \dots, a_i + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j a_j, \dots, a_n)) = \det(A)$

d) $\forall i \in [n] \colon \lambda \in \mathbb{K} \colon \det((a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n)) = \lambda \det(A)$

e) $\exists i, j \in [n] \colon i \neq j \wedge a_i = a_j \implies \det(A) = 0$

f) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \colon \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

g) $A$ invertierbar $\implies \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

h) $\forall B \in \mathbb{K}^{n \times n} \colon \det(AB) = \det(A) \det(B)$

i) $\det(I_n) = 1$

*Beweis.* Nur a) explizit:

a)

$$\det(A^T) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n}$$
$$= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi^{-1}(1)} \cdots a_{n\pi^{-1}(n)}$$
$$\underbrace{=}_{\substack{\operatorname{sgn}(\pi^{-1})=\operatorname{sgn}(\pi) \\ \pi^{-1} \mapsto \pi}} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

b) - i) folgt daraus, dass für

$$\alpha \colon \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ x \mapsto A \cdot x \end{cases} : \det(A) = \frac{a}{b} \text{ (Satz 1.3.4)}$$

und, dass $\varphi$ alternierende n-Form ist, beziehungsweise Korollar 1.3.3 □

**Satz 1.4.2:**

Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ähnlich, das heißt $\exists P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar mit $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Dann gilt

$$\det(A) = \det(B)$$

Weiters ist A genau dann invertierbar wenn $\det(A) \neq 0$.

*Beweis.*

$$\det(B) = \det(P) \underbrace{\det(P^{-1})}_{=\det(P)^{-1}} \det(A) = \det(A)$$

Rest folgt, da $\det(A) = \det(\alpha)$ mit $\alpha \colon \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ x \mapsto A \cdot x \end{cases}$. □

**Berechnungsverfahren**

Gaußalgorithmus führt 1) Zeilenvertauschungen und 2) Additionen von Vielfachen einer Zeile zu einer anderen durch. Raus kommt eine obere Dreiecksmatrix.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Die Operationen von 2) ändern die Determinante gar nicht, die Operationen von 1) ändern das Vorzeichen.

**Satz 1.4.3:**

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $B$ wie 1.2 das Resultat des Gaußalgorithmus auf $A$ angewendet mit $k$ Zeilenvertauschungen. Dann gilt

$$\det(A) = (-1)^k b_{11} \cdot \dots \cdot b_{nn}$$

*Beweis.* Für Matrizen der Form 1.2 ist die Determinante das Produkt der Diagonalelemente. Rest folgt aus der Definition des Gaußalgorithmus, sowie Satz 1.4.1. □

### Regel von Sarrus

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$

$$\begin{array}{cccccl} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & + + + - - - \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2 \times 2} \implies \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$n > 3 \rightarrow$ Gaußalgorithmus

**Definition 1.4.4:**

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $i, j \in [n]$. Sei $M_{ij} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Matrix, welche durch Ersetzung der j-ten Spalte durch den i-ten Einheitsvektor $e_j$ entsteht.

$A_{ij} := \det(M_{ij})$ heißt Kofaktor (zum Indexpaar $(i, j)$).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & & j & & & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & 0 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji-1} & 1 & a_{ji+1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & 0 & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \overset{= M_{ij}}{=} (a_{\_1}, \dots, \underbrace{e_i}_{j}, \dots, a_{\_n})$$

**Bemerkung**

Es gilt

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & 0 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & 0 & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

da obige Matrix aus $M_{ij}$ durch Spaltenadditionen hervorgeht.

**Lemma 1.4.5:**

Sei $\tilde{A_{ij}} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, welche aus A durch Streichung der i-ten Spalte und j-ten Zeile hervorgeht und $D_{ij} := \det(\tilde{A_{ij}})$. Dann gilt

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

*Beweis.* Transformiere durch $(i-1)$ Spaltenvertauschungen und $(j-1)$ Zeilenvertauschungen die Matrix 1.3 auf

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A_{ij}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Es gilt $|B_{ij}| = D_{ij}$ und $|B_{ij}| = (-1)^{(i-1)+j(-1)} A_{ij}$, woraus die Behauptung folgt. □

**Satz 1.4.6 (Entwicklungssatz von Laplace):**

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $i, j \in [n]$. Dann gilt

a) $\det(A) = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{il} A_{il} = \sum\limits_{l=1}^{n} (-1)^{l+i} a_{il} D_{il}$

b) $\det(A) = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{lj} A_{lj} = \sum\limits_{l=1}^{n} (-1)^{l+j} a_{lj} D_{lj}$

*Beweis.* b)

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(a_{_1}, \ldots, a_{_n}) \\
&= \det(a_{_1}, \ldots, \underbrace{\sum_{l=1}^{n} a_{lj} e_l}_{=a_{_j}}, \ldots, a_{_n}) \\
&= \sum_{l=1}^{n} a_{lj} \det(a_{_1}, \ldots, \underbrace{e_l}_{j}, \ldots, a_{_n}) \\
&= \sum_{l=1}^{n} a_{lj} A_{lj}
\end{aligned}$$

a) analog (angewendet auf $A^T$). □

**Satz 1.4.7 (Cramer'sche Regel):**

Sei $\operatorname{adj}(A) = (A_{ji})_{i,j \in [n]}$. Dann gilt

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$$

*Beweis.* Sei $B = A \cdot \operatorname{adj}(A) \implies$

$$
\begin{aligned}
b_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \det(a_{\_1}, \dots, \underbrace{e_j}_{k}, \dots, a_{\_n}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \det \left( \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & k & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ j & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \right) \\
&= \det \left( j \rightarrow \begin{pmatrix} a_{1\_} \\ \vdots \\ a_{i\_} \\ \vdots \\ a_{n\_} \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \det(A) & i = j \end{cases}
\end{aligned}
$$

□

**Folgerung 1.4.8:**

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar. Sei $x \in \mathbb{K}^n$ die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Dann gilt

$$
x_i = \det(A)^{-1} \det(a_{\_1}, \dots, \underbrace{b}_{i}, \dots, a_{\_n})
$$

*Beweis.*

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} (\operatorname{adj}(A)) \\
\implies \det(A) x_i &= \sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j \quad = \sum_{j=1}^{n} b_j \det(a_{\_1}, \dots, \underbrace{e_j}_{i}, \dots, a_{\_n}) \\
&\qquad\qquad\qquad = \det(a_{\_1}, \dots, \underbrace{b}_{i}, \dots, a_{\_n})
\end{aligned}
$$

□

### Blockmatrizen

**Definition 1.4.9:**

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt <u>obere Blockmatrix</u> wenn $\exists p \in \{1,\dots,n-1\}$ mit $a_{ij} = 0$ für $p+1 \le i \le n, 1 \le j \le p$, d.h.

$$A = \begin{array}{r} \\ p\{ \\ n-p\{ \end{array} \begin{pmatrix} \overbrace{\quad}^{p} & \overbrace{\quad}^{n-p} \\ P & D \\ 0 & Q \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Analog sind <u>untere Blockmatrizen</u> definiert.

**Satz 1.4.10:**

Sei $A$ obere Blockmatrix wie in 1.4. Dann gilt $\det(A) = \det(P)\det(Q)$

*Beweis.* Sei $A = \begin{pmatrix} P & D \\ 0 & Q \end{pmatrix}$.

Wende elementare Zeilenumformungen der ersten $p$ Zeilen an, sodass $P$ obere Dreiecksform hat (mit $s$ Zeilenvertauschungen) und elementare Zeilenumformungen der letzten $n-p$ Zeilen sodass $Q$ obere Dreiecksform hat (mit $t$ Zeilenvertauschungen). Bezeichne das Ergebnis mit $A' = \begin{pmatrix} P' & D' \\ 0 & Q' \end{pmatrix}$, wobei $P', Q'$ obere Dreiecksform haben.

Es folgt, dass $A', P', Q'$ obere Dreiecksform hat. Da die Determinante oberer Dreiecksmatrizen das Produkt der Diagonalelemente ist, gilt $\det(A') = \det(P')\det(Q')$.

Weiters gilt $\det(A') = (-1)^{s+t}\det(A)$ (insgesamt $s+t$ Vertauschungen) und $\det(P') = (-1)^s\det(P), \det(Q') = (-1)^t\det(Q)$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

# Kapitel 2

# Eigenwerte und Eigenvektoren

## 2.1 Diagonalisierbarkeit

**Definition 2.1.1:**
$D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt Diagonalmatrix wenn $\forall i \neq j \colon d_{ij} = 0$. Wir schreiben auch

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**Bemerkung**

- $A \in \mathbb{K}^{n\times m} \implies \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)A = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1\_} \\ \vdots \\ \lambda_n a_{n\_} \end{pmatrix}$
- $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$

**Definition 2.1.2:**

a) $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V), \dim(V) < \infty$ heißt diagonalisierbar (bzgl. $B$) wenn eine geordnete Basis $B$ existiert mit ${}_BM(\alpha)_B$ Diagonalmatrix

b) $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt diagonalisierbar wenn eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ existiert mit $P^{-1}AP$ Diagonalmatrix.

**Lemma 2.1.3:**
Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$.

Dann gilt für $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ und $C$ Basis:

$$\alpha \text{ diagonalisierbar } \iff {}_C M(\alpha)_C \text{ diagonalisierbar}$$

*Beweis.* $\implies$ : Sei $\alpha$ diagonalisierbar und $B$ eine Basis mit ${}_B M(\alpha)_B$ Diagonalmatrix. Dann gilt

$$\begin{aligned} {}_B M(\alpha)_B &= {}_B M(\mathrm{id})_C \cdot {}_C M(\alpha)_C \cdot {}_C M(\mathrm{id})_B \\ &= {}_C M(\mathrm{id})_B{}^{-1} \cdot {}_C M(\alpha)_C \cdot {}_C M(\mathrm{id})_B \end{aligned}$$

Also ist ${}_C M(\alpha)_C$ diagonalisierbar.

$\impliedby$ : Sei ${}_C M(\alpha)_C$ diagonalisierbar und $P$ invertierbar mit $P^{-1} \cdot {}_C M(\alpha)_C \cdot P$ Diagonalmatrix. Sei $B$ Basis mit $P = {}_C M(\mathrm{id})_B$. Dann gilt ${}_B M(\alpha)_B$ ist Diagonalmatrix. □

**Lemma 2.1.4:**

a) $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ ist diagonalisierbar genau wenn es eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ gibt mit $\forall i = 1, \dots, n\colon \alpha(b_i) = \lambda_i b_i$.

b) $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar genau wenn es eine geordnete Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von $\mathbb{K}^n$ gibt mit $\forall i = 1, \dots, n\colon Ab_i = \lambda_i b_i$.

*Beweis.* a) die Bedingung ist äquivalent zu ${}_B M(\alpha)_B$ diagonalisierbar.

b) Spezialfall von a). □

## 2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

**Definition 2.2.1:**

a) Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt <u>Eigenwert</u> von $\alpha$ wenn es einen Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ gibt mit $\alpha(v) = \lambda v$. $v$ heißt <u>Eigenvektor</u> zu $\lambda$.
Die Menge aller Eigenwerte von $\alpha$ heißt <u>Spektrum</u> von $\alpha$; $\mathrm{spec}(\alpha)$

b) Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt <u>Eigenwert</u> von $A$ wenn es $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gibt mit $Av = \lambda v$. $v$ heißt <u>Eigenvektor</u> zu $\lambda$.
Die Menge aller Eigenwerte von $A$ heißt <u>Spektrum</u> von $A$; $\mathrm{spec}(A)$

**Lemma 2.2.2:**

a) $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ diagonalisierbar $\iff$ $\exists$ Basis aus Eigenvektoren.

b) $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar $\iff$ $\exists$ Basis aus Eigenvektoren.

*Beweis.* Folgt direkt aus Lemma 2.1.4 und Definition 2.2.1 $\square$

**Definition 2.2.3:**

a) Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ und $\lambda \in \mathrm{spec}(\alpha)$. Dann heißt $\mathrm{Eig}_\alpha(\lambda) := \{v \in V : \alpha(v) = \lambda v\}$ der zugehörige Eigenraum.

b) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$. Dann heißt $\mathrm{Eig}_A(\lambda) := \{v \in \mathbb{K}^n : Av = \lambda v\}$ der zugehörige Eigenraum.

**Lemma 2.2.4:**

Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V) / A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathrm{spec}(\alpha) / \lambda \in \mathrm{spec}(A)$.
Dann ist $\mathrm{Eig}_\alpha(\lambda) / \mathrm{Eig}_A(\lambda)$ ein Unterraum von $V/\mathbb{K}$.

*Beweis.* Nur für $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$

- $0 = \alpha(0) = \lambda \cdot 0 \implies 0 \in \mathrm{Eig}_\alpha(\lambda)$
- $v, w \in \mathrm{Eig}_\alpha(\lambda) \implies \alpha(v+w) = \alpha(v) + \alpha(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda(v+w) \implies v + w \in \mathrm{Eig}_\alpha(V)$
- $\mu \in \mathbb{K}, v \in \mathrm{Eig}_\alpha(\lambda) \implies \alpha(\mu v) = \mu \cdot \alpha(v) = \mu \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \implies \mu \cdot v \in \mathrm{Eig}_\alpha(\lambda)$
  $\square$

**Satz 2.2.5:**

Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ und $B$ Basis. Dann gilt

$$\mathrm{spec}(\alpha) = \mathrm{spec}({}_BM(\alpha)_B)$$
$$ {}_B\Phi(\mathrm{Eig}_\alpha(\lambda)) = \mathrm{Eig}_{{}_BM(\alpha)_B}(\lambda)$$

*Beweis.* Sei $\lambda \in \mathrm{spec}(\alpha)$ und $v \in \mathrm{Eig}_\alpha(\lambda)$. Dann gilt

$$\alpha(v) = \lambda v \iff {}_BM(\alpha)_B \cdot {}_Bv = \lambda \cdot {}_Bv$$ $\square$

**Definition 2.2.6:**

a) Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V), \dim(V) < \infty$ und $B$ Basis. Dann heißt die Funktion

$$\chi_\alpha \colon \begin{cases} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ \lambda \mapsto \det({}_B M(\alpha)_B - \lambda \cdot I_n) \end{cases}$$

charakteristisches Polynom von $\alpha$.

b) Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann heißt die Funktion

$$\chi_A \colon \begin{cases} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ \lambda \mapsto \det(A - \lambda \cdot I_n) \end{cases}$$

charakteristisches Polynom von $A$.

**Bemerkung**

$\begin{matrix} \chi_\alpha \\ \chi_A \end{matrix}$ ist Polynom vom Grad $\leq \begin{matrix} \dim(V) \\ n \end{matrix}$, da

$$\chi_A(\lambda) = \sum_{\pi \in S_n} \tilde{a}^{(\lambda)}_{1\pi(1)} \cdots \tilde{a}^{(\lambda)}_{n\pi(n)} \text{ mit}$$

$$\tilde{a}^{(\lambda)}_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \neq j \\ a_{ij} - \lambda & i = j \end{cases} \ldots \text{ Polynom von Grad 0 oder 1}$$

**Lemma 2.2.7:**

a) $\chi_\alpha$ ist unabhängig von der Wahl der Basis.

b) $\chi_A = \chi_B$ wenn $A, B$ ähnlich (das heißt $\exists P \in \mathbb{K}^{n \times n} \colon B = P^{-1}AP$)

*Beweis.* a) Sei C weitere Basis.

Dann gilt $\underbrace{{}_C M(\alpha)_C}_{B} = \underbrace{{}_C M(\mathrm{id})_B}_{P^{-1}} \underbrace{{}_B M(\alpha)_B}_{A} \underbrace{{}_B M(\mathrm{id})_C}_{P}$.

Man kann also alles auf b) zurückführen.

b)

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det(P)^{-1} \det(A - \lambda I) \det(P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda I) \\ &= \det(B - \lambda I) \\ &= \chi_B(\lambda) \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.2.8:**

a) Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$. Dann gilt

$$\mathrm{spec}(\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{K} \colon \chi_\alpha(\lambda) = 0\}$$

b) Sei $A \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$. Dann gilt

$$\mathrm{spec}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \colon \chi_A(\lambda) = 0\}$$

*Beweis.* Nur b)

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{spec}(A) &\iff \exists v \in V \setminus \{0\} \colon Av = \lambda v \\
&\iff \exists v \in V \setminus \{0\} \colon (A - \lambda I)v = 0 \\
&\iff \ker(A - \lambda I) \neq \{0\} \\
&\iff A - \lambda I \text{ nicht injektiv} \\
&\iff \det(A - \lambda I) = 0
\end{aligned}$$

□

**Beispiele**

$$A = \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{2\times 2}$$

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \bar{3} - \lambda & \bar{4} \\ \bar{1} & \bar{1} - \lambda \end{vmatrix} \quad &= (\bar{3} - \lambda)(\bar{1} - \lambda) - \bar{4} \\
&= \bar{3} - \bar{4}\lambda + \lambda^2 - \bar{4} \\
&= \bar{4} - \bar{4}\lambda + \lambda^2 = (\bar{2} - \lambda)^2
\end{aligned}$$

$$\implies \mathrm{spec}(A) = \{2\}$$

$$\mathrm{Eig}_{\bar{2}}(A) = ?$$

$$v \in \mathrm{Eig}_{\bar{2}}(A) \iff (A - \bar{2}I)v = 0$$

$$\iff \left( \begin{array}{cc|c} \bar{3} - \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} - \bar{2} & \bar{0} \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{4} & \bar{0} \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right)$$

$$\implies \mathrm{Eig}_{\bar{2}}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\implies A \text{ nicht diagonalisierbar [Lemma 2.1.4 (b)]}$$

**Lemma 2.2.9:**

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit reellen Einträgen. Dann gilt:

a) $\lambda \in \operatorname{spec}(A) \implies \overline{\lambda} \in \operatorname{spec}(A)$

b) $v \in \operatorname{Eig}_\lambda(A) \implies \overline{v} \in \operatorname{Eig}_{\overline{\lambda}}(A)$

*Beweis.* a) Klarerweise ist $\chi_A(\lambda)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, also $\chi_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$
Sei $\chi_A(\lambda) = 0 \implies 0 = \overline{0} = a_0 + a_1\overline{\lambda} + \cdots + a_n\overline{\lambda}^n = \chi_A(\overline{\lambda})$

b) $v \in \operatorname{Eig}_\lambda(A) \implies Av = \lambda v \implies \overline{Av} = \overline{\lambda v} \implies A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$ □

**Lemma 2.2.10:**

Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind linear unabhängig.

*Beweis.* Seien $v_i \in \operatorname{Eig}_{\lambda_i}(A), i = 1, \ldots, r, \lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Induktion nach $r$

$r = 1$: $v_1$ ist linear unabhängig.

$r - 1 \mapsto r$:

$$\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_r v_r = 0 \tag{2.1}$$

$$\implies A(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_r v_r) = 0$$

$$\implies \lambda_1\mu_1 v_1 + \cdots \lambda_r\mu_r v_r = 0 \tag{2.2}$$

Weiters folgt durch Multiplikation von 2.1 mit $\lambda_r$, dass

$$\lambda_r\mu_1 v_1 + \cdots + \lambda_r\mu_r v_r = 0 \tag{2.3}$$

$$2.3 - 2.2 \implies \underbrace{(\lambda_r - \lambda_1)}_{\neq 0}\mu_1 v_1 + \cdots + \underbrace{(\lambda_r - \lambda_{r-1})}_{\neq 0}\mu_{r-1}v_{r-1} = 0$$

$$\implies v_1, \ldots, v_{r-1} \text{ linear abhängig.}$$ □

**Lemma 2.2.11:**

Sei $\alpha \in \operatorname{Hom}_\mathbb{K}(V, V), \dim(V) = n$ oder $A \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ mit $n$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten. Dann ist $\alpha/A$ diagonalisierbar.

*Beweis.* Wegen Lemma 2.2.10 gibt es Basis von Eigenvektoren. Daher ist $\alpha/A$ diagonalisierbar wegen Lemma 2.2.2. □

**Definition 2.2.12:**

Sei $\operatorname{spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ und $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdots (\lambda_r - \lambda)^{k_r} \cdot p \in \mathbb{K}[X]$ mit $p$ nicht durch Linearfaktoren teilbar (also keine Nullstellen in $\mathbb{K}$).
$k_i$ heißt algebraische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_i$. Wir schreiben $k_i = m_a(\lambda_i)$.
$\dim(\operatorname{Eig}_A(\lambda_i))$ heißt geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_i$. Wir schreiben $\dim(\operatorname{Eig}_A(\lambda_i)) = m_g(\lambda_i)$

### Beispiel

- $\chi_A(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 \in \mathbb{R}[X]$
  $\implies \chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 \underbrace{(1+\lambda^2)}_{p(\lambda)}$
  $\implies m_a(1) = 2$
- Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren, also ist $p$ immer konstant.

**Satz 2.2.13:**

Sei $\mu \in \operatorname{spec}(A)/\operatorname{spec}(\alpha)$. Dann gilt

$$1 \le m_g(\mu) \le m_a(\mu)$$

*Beweis.* Klarerweise gilt $1 \le m_g(\mu)$ da $\mu$ Eigenwert ist. Sei $r := m_g(\mu)$ und $b_1, \dots, b_r$ Basis von $\operatorname{Eig}_\alpha(\mu)$. Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis. Dann ist

$$_BM(\alpha)_B = \begin{array}{c} \\ \\ \\ r \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{\mu} & \phantom{\mu} & \phantom{\mu} & r & \phantom{*} & \phantom{\dots} & \phantom{*} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \mu & 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \mu & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} \end{array}, \text{ also}$$

$$\chi_\alpha(\lambda) = \left| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \mu-\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \mu-\lambda \end{matrix} & A \\ \hline 0 & C \end{array} \right| \underbrace{=}_{\text{Satz 1.4.10}} \det \begin{pmatrix} \mu - \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu - \lambda \end{pmatrix} \cdot \det(C)$$

$$= (\mu - \lambda)^r \det(C)$$

$$\implies r \le m_a(\mu)$$

□

**Lemma 2.2.14:**

Seien $A, B$ ähnlich und $\mu \in \operatorname{spec}(A)(= \operatorname{spec}(B)$ nach Lemma 2.2.7). Dann stimmen die geometrischen Vielfachheiten überein, das heißt $\dim(\operatorname{Eig}_\mu(A)) = \dim(\operatorname{Eig}_\mu(B))$.

*Beweis.* Sei $B = P^{-1}AP$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Eig}_\mu(B) &= \ker(B - \mu I) = \ker(B - \mu P^{-1}P)\\ &= \ker(P^{-1}(A - \mu I)P)\\ &\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Für ähnliche Matrizen stimmen die Dimensionen der Kerne überein}} \dim(\operatorname{Eig}_\mu(B)) = \dim \operatorname{Eig}_\mu(A)\end{aligned}$$

□

**Satz 2.2.15:**

$A/\alpha$ diagonalisierbar $\iff$

i) $\chi_{A/\alpha}$ zerfällt in Linearfaktoren, das heißt

$$\chi_{A/\alpha}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdots (\lambda_r - \lambda)^{k_r}, \sum_{i=1}^{r} k_i = n$$

ii) algebraische und geometrische Vielfachheiten stimmen überein, das heißt $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i), i = 1, \dots, r$

*Beweis.* $\Longleftarrow$: Aus i), ii) folgt, dass

$$\sum_{i=1}^{r} \underbrace{\dim(\operatorname{Eig}_\alpha(\lambda_i))}_{=m_g(\lambda_i)=:d_i} = n \tag{2.4}$$

Sei $(b_i^1, \dots, b_i^{d_i})$ Basis von $\operatorname{Eig}_\alpha(\lambda_i)$. Wir zeigen, dass $B = \{b_i^1, \dots, b_i^{d_i} : i = 1, \dots, r\}$ Basis ist.

1) $|B| = n$ folgt aus 2.4

2) Ang. $\sum_{i=1}^{r} \underbrace{(\mu_i^1 b_i^1 + \dots + \mu_i^{d_i} b_i^{d_i})}_{v_i} = 0$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{v_i\text{Eigenvektoren zu}\\ \text{verschiedenen Eigenwerten}\\ +\text{Lemma 2.2.10}}} v_i = 0 \forall i = 1, \dots, r \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{b_i^1,\dots,b_i^{d_i}\\ \text{Basis von } \operatorname{Eig}_\alpha(\lambda_i)}} \mu_i^1, \dots, \mu_i^{d_i} = 0 \forall i = 1, \dots, r$$

$\Longrightarrow$ $B$ ist Basis aus Eigenvektoren $\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Lemma 2.2.2}}$ $\alpha$ diagonalisierbar.

$\Longrightarrow$: Sei $\alpha$ diagonalisierbar.

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow \exists \text{ Basis } B = (b_1, \dots, b_n) \text{ aus Eigenvektoren}\\ &\Longrightarrow {}_BM(\alpha)_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\\ &\Longrightarrow \chi_B(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)\end{aligned}$$

□

**Diagonalisieren**

1) Zerlegung in Linearfaktoren

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_a(\lambda_1)} \cdots (\lambda_r - \lambda)^{m_a(\lambda_r)}$$

2) Bestimme Basis $B_i$ der Eigenräume

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda_i) = \ker(A - \lambda_i I)$$

3) Ordne Basis $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ zu $B = (b_1, \ldots, b_n)$

4) Mit $S = (b_1, \ldots, b_n)$ gilt dann

$$\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}_{\substack{\text{Eigenwerte werden nach} \\ \text{Vielfachheit gezählt!} \\ \lambda_i \text{ ist Eigenwert von } b_i!}}) = S^{-1}AS$$

**Beispiel**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1)

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &\underbrace{=}_{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach 1. Zeile}}} (1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &\quad + 2\begin{vmatrix} 2 & -2-\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \cdots = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27 = (3-\lambda)(-3-\lambda)^2\end{aligned}$$

2) $\lambda = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2-3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2-3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Eig}_A(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\lambda = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2+3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2+3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies \mathrm{Eig}_A(-3) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3)

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**Lemma 2.2.16:**

Sei $A \in \mathbb{K}^{\mathrm{n} \times \mathrm{n}}$ und $\underbrace{\mathrm{sp}(A)}_{\text{"Spur von } A\text{"}} := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \mathrm{sp}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det(A)$$

*Beweis.*

$$\chi_A(\lambda) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{i\pi(i)} \text{ mit } \tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \neq j \\ a_{ij} - \lambda & i = j \end{cases}$$

Wenn $\pi \neq \mathrm{id}$ gilt $\deg\left(\prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{i\pi(i)}\right) \leq n-2$, da mindestens zwei Elemente vertauscht werden. Die Koeffizienten von Grad $n, n-1$ kann man also aus $\prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii} = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda)$ ablesen. Daraus folgt die Behauptung für die höchsten beiden Koeffizienten. Weiters gilt $\chi_A(0) = \det(A)$, was die Aussage für den konstanten Koeffizienten zeigt. $\square$

**Korollar 2.2.17:**

a) $A \sim B \implies \mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(B)$

b) A diagonalisierbar $\implies \mathrm{sp}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Eigenwerte von $A$, nach Vielfachheit gezählt.

c) A diagonalisierbar $\implies \det(A) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Eigenwerte von $A$, nach Vielfachheit gezählt.

*Beweis.* Folgt daraus, dass das charakteristische Polynom (und damit seine Koeffizienten) unter Ähnlichkeit invariant sind (Lemma 2.2.7) und Lemma 2.2.16 □

**Satz 2.2.18 (Cayley-Hamilton):**

"$\chi_A(A) = 0$", das heißt sei $A \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(\lambda) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_0$. Dann gilt

$$\chi_A(A) := c_nA^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots c_0 I = 0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$$

*Beweis.* Sei $B := A^T - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = (a_{ji} - \delta_{ij}\lambda)_{ij}$ und $C := \operatorname{adj}(B)$, sodass

$$CB \overset{1.4.7}{=} \det(B)I_n = \chi_A \cdot I_n \; [\chi_A = \chi_{A^T}] \tag{2.5}$$

2.5 heißt komponentenweise, dass

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \underbrace{c_{ki}}\underbrace{b_{ij}}_{\text{Polynome, in die } A \text{ eingesetzt werden kann}} = \delta_{ij} \cdot \underbrace{\chi_A} \; \forall k,j \in [n] \\ &= \sum_{i=1}^n c_{ki}(A)b_{ij}(A) = \delta_{jk}\chi_A(A) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Wegen $b_{ij}(A) = a_{ji}I_n - \delta_{ij}A$ gilt weiters

$$\forall i \in [n]\colon \sum_{j=1}^n b_{ij}(A)e_j = \left(\sum_{j=1}^n a_{ji}e_j\right) - Ae_i = 0 \tag{2.7}$$

Es folgt $\forall k \in [n]$:

$$\begin{aligned}
\chi_A(A)e_k &= \sum_{j=1}^{n} \delta_{jk}\chi_A(A)e_j \\
&\underbrace{=}_{2.6} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ki}(A)b_{ij}(A)e_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_{ki}(A)\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(A)e_j\right) \\
&\underbrace{=}_{2.7} 0 \\
&\implies \chi_A(A) = 0
\end{aligned}$$

□

**Berechnung der Koeffizienten von $\chi_A$**

Sei $f(\lambda) \underbrace{=}_{(*)} \prod_{j=1}^{n}(\lambda_j - \lambda) = \underbrace{c_n}_{=(-1)^n} \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0$ Wie können wir $c_j$ effizient bestimmen?

$$\sigma_j := (-1)^j \sum_{\substack{S\subset[n] \\ |S|=n-j}} \prod_{s\in S} \lambda_s$$

Bemerkung 1: $c_j = (-1)^j \sum_{\substack{S\subseteq[n] \\ |S|=n-j}} \prod_{s\in S} \lambda_s =: \sigma^n_{n-j}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Dies folgt aus (*) durch Ausmultiplizieren

Sei nun weiters $p^n_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j$

Bemerkung 2: $\sigma^n_j, p^n_j$ sind symmetrisch, das heißt

$$\left.\begin{aligned}
\sigma^n_j(\lambda_{\pi(1)}, \ldots, \lambda_{\pi(n)}) &= \sigma^n_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \\
p^n_j(\lambda_{\pi(1)}, \ldots, \lambda_{\pi(n)}) &= p^n_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)
\end{aligned}\right\} \text{für } \pi \in S_n$$

**Lemma 2.2.19 (Newtonidentität):**

Es gilt für $k \leq n$

$$k\sigma^n_k + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma^n_j p^n_{k-j} = 0$$

*Beweis.* Induktion.

$k = n$: Wegen

$$0 = \sum_{i=1}^{n} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_j \lambda_i^j = \sum_{j=0}^{n} c_j p_j^n = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{n-j}^n p_j^n = \sum_{j=0}^{n} \sigma_j^n p_{n-j}^n$$

folgt $\sigma_n^n p_0^n + \sum_{j=0}^{n} \sigma_j^n p_{n-j}^n = 0$ was mit $p_0^n = n$ die gewünschte Aussage liefert.

$k < n$: Betrachte das (symmetrische)

$$q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := k\sigma_k^n + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j^n p_{k-1}^n$$

Es gilt

$$q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{j_1, \ldots, j_n} c_{j_1 \ldots j_n} \lambda_1^{j_1} \cdots \lambda_n^{j_n}$$

und wir müssen zeigen, dass alle Koeffizienten $c_{j_1 \ldots j_n} = 0$ sind. Dazu bemerken wir, dass $c_{j_1 \ldots j_n}$ immer 0 ist, wenn mehr als $k$ $j_i$'s ungleich 0 sind.
Sei also $c_{j_1 \ldots j_n}$ ein solcher Koeffizient mit $j_{k+1}, \ldots, j_n = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} q(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0) &= \sum_{j_1, \ldots, j_k} c_{j_1 \ldots j_n 0 \ldots 0} \lambda_1^{j_1} \cdots \lambda_n^{j_k} \\ \| \quad & \\ k\sigma_k^n + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j^k p_{k-1}^k &= 0 \text{ nach Voraussetzung} \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie gilt dasselbe Argument für alle anderen Koeffizienten mit höchstens $k$ vielen $j_i$'s ungleich 0. □

**Satz 2.2.20:**

Sei $A \in \mathbb{K}^{\mathrm{n} \times \mathrm{n}}$ diagonalisierbar. Dann gilt für

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= c_n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0 \\ c_n &= (-1)^n \\ c_{n-k} &= -\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_{n-j} \operatorname{sp}(A^{k-j}) \end{aligned}$$

*Beweis.* Folgt direkt aus Lemma 2.2.19 und der Bemerkung dass für $A$ diagonalisierbar $\operatorname{sp}(A^k) = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$ gilt. □

### Bemerkung

Gilt auch für $A$ nicht diagonalisierbar. "Beweis"Stetigkeit
"fast alle Matrizen sind diagonalisierbar"

## Triangulierbarkeit von Matrizen

**Definition 2.2.21:**

a) $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V), \dim(V) = n$ heißt triangulierbar wenn es eine Basis $B$ gibt, sodass ${}_BM(\alpha)_B$ obere Dreiecksgestalt hat.

b) $A \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ heißt triangulierbar wenn es eine reguläre Matrix $P \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ gibt, mit $P^{-1}AP$ obere Dreiecksgestalt.

**Satz 2.2.22:**

$A \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}/\alpha$ ist triangulierbar $\iff$ $\chi_A/\chi_\alpha$ zerfällt in Linearfaktoren.

*Beweis (Beweis).* $\implies$ : $\chi_A$ ist invariant bezüglich Ähnlichkeitsumformung (Lemma 2.2.7).

Sei $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, dann folgt

$\chi_A(\lambda) = \chi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda)$

$\impliedby$ : Induktion nach $n$

$n = 1$: Jede $1 \times 1$ Matrix ist obere Dreiecksmatrix.

$n-1 \mapsto n$: Sei $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda)$ und sei $b_1 \in \mathrm{Eig}_{\lambda_1}(\alpha)$. Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ Basis von $\mathbb{K}^n$. Dann gilt

$$A = {}_BM(\alpha)_B = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$\text{Sei } \beta\colon \begin{cases} \overbrace{\langle b_2, \ldots, b_n\rangle}^{V} & \to \langle b_2, \ldots, b_n\rangle \\ b_i & \mapsto \Phi_{\tilde{B}}^{-1}(C \cdot {}_{\tilde{B}}v) \end{cases}$$

Es gilt $\chi_\alpha(\lambda) = \lambda_1 - \lambda) \cdot \chi_\beta(\lambda)$, daher zerfällt $\chi_\beta$ in Linearfaktoren. Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Basis $\tilde{B} = (\tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_n)$ von $\tilde{V}$ mit

$$ {}_{\tilde{B}}M(\beta)_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Weiters ist $\alpha(b_i) = a_{1i}b_1 + \beta(b_i), i = 2, \ldots, n$. Sei $\tilde{b}_i = \sum_{j=2}^{n} \mu_{ij}b_j$. Wegen 2.8 gilt

$$\beta(\tilde{b}_i) \in \left\langle \tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_i \right\rangle \tag{2.9}$$

Wir zeigen nun, dass für die Basis $C = (c_1, \dots, c_n)$ mit $c_1 = b_1, c_2 = \tilde{b}_2, \dots, c_n = \tilde{b}_i$ die Matrix ${}_CM(\alpha)_C$ obere Dreiecksgestalt hat. Dies ist äquivalent zu

$$\alpha(c_i) \in \langle c_1, \dots, c_n \rangle \, \forall i = 1, \dots, n$$

$i = 1$: $\alpha(c_1) = \alpha(b_1) = \lambda_1 b_1 \in \langle b_1 \rangle = \langle c_1 \rangle$
$i > 1$:

$$\begin{aligned}
\alpha(c_i) = \alpha(\tilde{b}_i) = \alpha\left(\sum_{j=2}^{n} \mu_{ij} b_j\right) &= \sum_{j=2}^{n} \mu_{ij} \alpha(b_j) \\
= \sum_{j=2}^{n} \mu_{ij}(a_{1j} b_1 + \beta(b_j)) &= \underbrace{\left(\sum_{j=2}^{n} \mu_{ij} a_{1j}\right)}_{\sigma_i} + \sum_{j=2}^{n} \mu_{ij} \beta(b_j) \\
= \sigma_i b_1 + \beta(\sum_{j=2}^{n} \mu_{ij} b_j) &= \sigma_i b_1 + \beta(\tilde{b}_i) \\
\underbrace{\in}_{2.9} \left\langle b_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_i \right\rangle &= \langle c_1, \dots, c_i \rangle
\end{aligned}$$

□

## 2.3 Jordan Normalform

**Definition 2.3.1:**

Eine $m \times m$ Matrix

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

heißt Jordanblock der Dimension $m$ zum Eigenwert $\lambda$.
Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{\mathrm{n \times n}}$, die als Blockdiagonalmatrix aus Jordanblöcken besteht, heißt Jordanmatrix.
$A \in \mathbb{K}^{\mathrm{n \times n}}$ besitzt eine Jordan-Normalform wenn $P \in \mathbb{K}^{\mathrm{n \times n}}$ invertierbar existiert, sodass $P^{-1}AP$ Jordanmatrix ist.
$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ besitzt eine Jordan-Normalform wenn eine Basis $B$ von $V$ existiert, sodass ${}_BM(\alpha)_B$ Jordanmatrix ist.
B heißt Jordanbasis zu $A/\alpha$.

**Beispiel**

- Jede Diagonalmatrix ist Jordanmatrix

- $(1)$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $\cancel{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}}$

- $\begin{pmatrix}\boxed{3} & & \\ & 2 & 1\\ & & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ & & -1\end{pmatrix}$

Wir wollen zeigen, dass $\alpha/A$ genau dann eine Jordan-Normalform besitzt, wenn $\alpha/A$ triangulierbar ist.

### Bemerkung

- $\chi_{J_m(\lambda)}(\mu) = (\lambda - \mu)^m \implies \operatorname{spec}(J_m(\lambda)) = \{\lambda\}$

$$J_m(\lambda) - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\implies \dim(\operatorname{Eig}_{J_m(\lambda)}(\lambda)) = \dim(\ker(J_m(\lambda) - \lambda I)) = 1$
$\implies m_g(\lambda) = 1$ und $m_a(\lambda) = m$.

- $J_m(0)^m = 0$, das heißt $J_m(0)$ ist nilpotent.

$$J_m(0)(e_i)\colon \begin{cases} e_{i-1} & i \in \{2, \dots, m\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$J_m(0)^l(e_i)\colon \begin{cases} e_{i-l} & i \in \{l+1, \dots, m\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Definition 2.3.2:**
$\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ oder $A \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ heißt nilpotent (mit Index $m$) falls $\alpha^m = 0/A^m = 0$ und $\forall l \in [m-1]\colon \alpha^l \neq 0/A^l \neq 0$.

**Lemma 2.3.3:**
Sei $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V), \dim(V) = n$ nilpotent mit Index $m$. Dann existiert eine Basis $B$ mit

$$_BM(\alpha)_B = \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_{n-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \delta_i \in \{0,1\} \forall i \in [n-1]$$

Das heißt $_BM(\alpha)_B$ ist blockdiagonal mit Jordanblöcken mit Eigenwerten 0

*Beweis.* Sei $V_i := \ker(\alpha^i)$.
Dies ergibt eine aufsteigende Kette von Unterräumen

$$\underbrace{\{0\}}_{=V_0} \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq \underbrace{V_m}_{=V}$$

Wir bauen uns iterativ eine Basis für Komplemente $W_i$ mit $V_{i-1} \oplus W_i = V_i$. Sei also $B^{m-1}$ Basis von $V_{m-1}$.
$C^m = (c_1^m, \dots, c_{r_m}^m)$ Basis von $W_m$ [das heißt $C^m$ ergänzt die Basis $B^{m-1}$ zu Basis von $V^m$].
<u>Behauptung</u>

1) $\alpha(C^m) \subseteq V_{m-1}$
2) $\alpha(C^m)$ linear unabhängig
3) $\langle \alpha(C^m) \rangle \cap V_{m-2} = \{0\}$

*Beweis (Zwischenbeweis).* 1) folgt aus $\alpha(V_{i+1}) \subseteq \alpha(V_i)$

3) Sei $\sum_i \mu_i \alpha(c_i^m) \in V_{m-2}$

$$\begin{aligned}
&\implies \alpha^{m-2}\left(\sum_i \mu_i \alpha(c_i^m)\right) = 0 \\
&\implies \alpha^{m-1}\left(\sum_i \mu_i c_i^m\right) = 0 \\
&\implies \sum \mu_i c_i^m \in V_{m-1} \\
&\underbrace{\implies}_{\substack{(c_i^m) \text{ liegen} \\ \text{im Komplement} \\ \text{von } V_{m-1}}} \mu_i = 0, \forall i \implies \sum_i \mu_i \alpha(c_i^m) = 0
\end{aligned}$$

2) folgt aus 3) [da $0 \in V_{m-2}$] ☐

Es folgt, dass

$$\underbrace{V_{m-2} \oplus \langle \alpha(C^m) \rangle \oplus \overbrace{\left\langle C^{m-1} \right\rangle}^{\langle D^{m-1} \rangle}}_{V_{m-1}} \oplus \overbrace{\langle C^m \rangle}^{\langle D^m \rangle} = V$$

Setze $D^m := C^m$ und definiere induktiv für $D^i \subseteq V_i$ die Menge $D^{i-1} := \alpha(D^i) \cup C^{i-1} \subseteq V_{i-1}$ sodass mit einer Basis $B^{i-2}$ von $V_{i-2}$ die Menge $B^{i-2} \cup D^{i-1}$ Basis von $V_{i-1}$ ist, also

$$V_{i-2} \oplus \underbrace{\left\langle \alpha(D^i) \right\rangle \oplus \left\langle C^{i-1} \right\rangle}_{\langle D^i \rangle} = V_{i-1} \leftarrow \text{ das geht nach obiger Behauptung}$$

Nach Konstruktion ist $(D^1, \dots, D^m)$ Basis von $V$. Sie besteht aus folgenden Elementen:

$$
\begin{array}{rl}
\left.\begin{array}{rll}
J_m(0) \to & \alpha^{m-1}(d_1^m), \dots, \alpha(d_1^m), & d_1^m \\
 & & \vdots \\
J_m(0) \to & \alpha^{m-1}(d_{r_m}^m), \dots, \alpha(d_{r_m}^m), & d_{r_m}^m
\end{array}\right\} & \in V_m \\
\left.\begin{array}{rll}
J_{m-1}(0) \to & \alpha^{m-2}(d_1^{m-1}), \dots, \alpha(d_1^{m-1}), & d_1^{m-1} \\
 & & \vdots \\
J_{m-1}(0) \to & \alpha^{m-2}(d_{r_{m-1}}^{m-1}), \dots, \alpha(d_{r_{m-1}}^{m-1}), & d_{r_{m-1}}^{m-1}
\end{array}\right\} & \in V_{m-1} \\
\left.\begin{array}{rl}
J_1(0) \to & d_1^1 \\
 & \vdots \\
J_1(0) \to & d_{r_1}^1
\end{array}\right\} & V_1 = \ker(\alpha)
\end{array}
$$

Wenn wir die Basiselemente von links nach rechts und von oben nach unten ordnen erhalten wir die gewünschte Gestalt. $\square$

**Bemerkung**

Angenommen $\alpha - \lambda \operatorname{id} \colon V \to V$ nilpotent. Dann besitzt $\alpha$ nach Lemma 2.3.3 Jordan-Normalform.

**Definition 2.3.4:**

Sei $V$ $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\dim(V) < \infty, \alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ und $\lambda \in \operatorname{spec}(\alpha)$. Für $l \in \mathbb{N}$ definiere $V_{l,\lambda} := \ker((\alpha - \lambda \operatorname{id})^l)$

**Bemerkung**

- $\alpha - \lambda \operatorname{id}|_{V_{l,\lambda}} \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V_{l,\lambda}, V_{l,\lambda})$:

$$
\begin{aligned}
\text{zu Zeigen: } v \in V_{l,\lambda} &\implies \alpha(v) - \lambda v \in V_{l,\lambda}, \text{ das heißt} \\
(\alpha - \lambda \operatorname{id})^l v = 0 &\implies (\alpha - \lambda \operatorname{id})^{l-1}(\alpha - \lambda \operatorname{id})v = 0 \\
&\implies (\alpha - \lambda \operatorname{id})(v) \in V_{l,\lambda} \qquad \square
\end{aligned}
$$

- Nach Lemma 2.3.3 gibt es also Basis von $V_{l,\lambda}$ bezüglich derer $\alpha - \lambda \operatorname{id}|_{V_{l,\lambda}} \colon V_{l,\lambda} \to V_{l,\lambda}$ Jordan-Normalform hat

**Lemma 2.3.5:**

Sei $V$ $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\dim(V) < \infty, \alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$. Für $l \in \mathbb{N}$ sei $V_l := \ker(\alpha^l)$. Dann gilt $\alpha(V_l) \subseteq V_{l-1} \subseteq V_l$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und es existiert genau ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_k = V_{k+1} \text{ und } V_{l+1} = V_l, \forall l \geq k$$

*Beweis.* Da $\dim(V) < \infty$ muss es ein kleinstes $k$ mit $V_{k+1} = V_k$ geben. Angenommen $\exists l \geq k$ mit $V_{l+1} \neq V_l$. Sei $0 \neq v \in V_{l+1} \setminus V_l \implies 0 = \alpha^{l+1}(v) = \alpha^{k+1}(\alpha^{l-k}(v))$ und $0 \neq \alpha^l(v) = \alpha^k(\alpha^{l-k}(v)) \implies 0 \neq \alpha^{l-k}(v) \in V_{k+1} \setminus V_k$ $\lightning$

**Definition 2.3.6:**

Sei $V_{l,\lambda}$ wie in Definition 2.3.4 und $k$ wie in Lemma 2.3.5 Dann heißt

$$\widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha}(\lambda) := V_{k,\lambda} = V_{k+1,\lambda}$$

<u>verallgemeinerter Eigenraum</u> oder <u>Hauptraum</u> von $\alpha$ zum Eigenwert $\lambda$. $v \in V_{l,\lambda} \setminus V_{l-1,\lambda}$ für $1 \leq l \leq k$ heißt <u>verallgemeinerter Eigenvektor</u> der Ordnung $l$.

**Idee**

- $\alpha|_{\widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha}(\lambda)} \colon \widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha}(\lambda) \to \widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha}(\lambda)$ hat Jordan-Normalform. Zerlege

$$V := \widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha}(\lambda_r) \tag{2.10}$$

  dann besitzt ganz $\alpha \colon V \to V$ Jordan-Normalform

- Sei $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ und $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$. Falls $\alpha(V_i) \subseteq V_i$ für alle $i \in [r]$, dann schreiben wir $\alpha = \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_r$ mit $\alpha_i = \alpha|_{V_i} \forall i \in [r]$. Für $v = v_1 + \cdots + v_r, v_i \in V_i, \forall i \in [r]$ gilt also $\alpha(v) = \alpha_1(v_1) + \cdots + \alpha_r(v_r)$. Sei $B_i = \{b_1^i, \ldots, b_{d_i}^i\}$ Basis von $V_i$ und $B = (B_1, \ldots, B_r)$. Dann hat ${}_BM(\alpha)_B$ Blockdiagonalgestalt mit Blöcken ${}_{B_i}M(\alpha_i)_{B_i}$, das heißt

$${}_BM(\alpha)_B = \begin{pmatrix} \overbrace{{}_{B_1}M(\alpha_1)_{B_1}}^{\in \mathbb{K}^{d_1 \times d_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{{}_{B_r}M(\alpha_r)_{B_r}}_{\in \mathbb{K}^{d_r \times d_r}} \end{pmatrix}$$

  Insbesondere gilt $\chi_\alpha = \chi_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \chi_{\alpha_r}$

- Da wir schon wissen, dass $\alpha|_{\widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha}(\lambda_i)}$ Jordan-Normalform hat folgt Jordan-Normalform für $\alpha$ wenn 2.10 gezeigt werden kann.

**Satz 2.3.7:**

Sei $V$ $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$ und $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ sodass $\chi_\alpha(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_r - \lambda)$ in Linearfaktoren zerfällt. Dann gilt $V = \widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha}(\lambda_r)$ und insbesondere $\alpha = \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_r$ mit $\alpha_i := \alpha|_{\widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha}(\lambda_i)} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha}(\lambda_i), \widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha}(\lambda_i))$

*Beweis.* Induktion nach $\dim(V)$.

$n=1$: ✓

$n-1 \mapsto n$: Da $\chi_A$ in Linearfaktoren zerfällt besitzt es eine Nullstelle $\lambda \in \operatorname{spec}(\alpha)$.

Fall 1: $\widetilde{\operatorname{Eig}_\alpha}(\lambda) = V$

Behauptung: $\operatorname{spec}(\alpha) = \{\lambda\}$

*Beweis (Zwischenbeweis).* Angenommen $\lambda' \neq \lambda$ und $\lambda' \in \operatorname{spec}(\alpha)$ und $v \in \operatorname{Eig}_\alpha(\lambda')$.

$\implies (\alpha - \lambda \operatorname{id})(v) = \alpha(v) - \lambda' v + (\lambda' - \lambda)v = (\lambda' - \lambda)(v)$

$\implies (\alpha - \lambda \operatorname{id})^l(v) \neq 0, \forall l \in \mathbb{N}$↯

Daraus folgt das gewünschte Resultat □

Fall 2: $\widetilde{\operatorname{Eig}_\alpha}(\lambda) \neq V$. Sei $k$ minimal mit $\ker(\alpha - \lambda - \operatorname{id})^k = \widetilde{\operatorname{Eig}_\alpha}(\lambda)$ [Lemma 2.3.5]

Setze $V_1 := \widetilde{\operatorname{Eig}_\alpha}(\lambda), V_2 := \operatorname{im}(\alpha - \lambda \operatorname{id})^k$.

Behauptung:

(i) $\alpha(V_i) \subseteq V_i, i \in \{1,2\}$

(ii) $V = V_1 \oplus V_2$

*Beweis (Zwischenbeweis).* (i) Wir zeigen $(\alpha - \lambda \operatorname{id})(V_i) \subseteq V_i$.

$i=1$: Sei $v \in V_1 = \ker(\alpha - \lambda \operatorname{id})^k$. Dann gilt klarerweise $(\alpha - \lambda \operatorname{id})(v) \in \ker(\alpha - \lambda \operatorname{id})^k$✓

$i=2$: Sei $v \in \operatorname{im}(\alpha - \lambda \operatorname{id})^k$, also $v = (\alpha - \lambda \operatorname{id})^k(w) \implies (\alpha - \lambda \operatorname{id})(v) = (\alpha - \lambda \operatorname{id})^k(\alpha - \lambda \operatorname{id})(w) \in \operatorname{im}(\alpha - \lambda \operatorname{id})^k$✓

(ii) Es gilt $\dim(V) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$ nach der Dimensionsformel. Es genügt also zu zeigen, dass $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Sei $v \in V_1 \cap V_2$

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\implies}_{v \in V_2} \exists w \in V : v = (\alpha - \lambda \operatorname{id})^k(w) \\
&\underbrace{\implies}_{v \in V_1} (\alpha - \lambda \operatorname{id})^{2k}(w) = 0 \\
&\implies w \in V_{2k,\lambda} \setminus V_{k,\lambda} \underbrace{\implies}_{\text{Lemma 2.3.5}} w = \{0\} ✓
\end{aligned}$$

□

Es folgt $V = \underbrace{\widetilde{\operatorname{Eig}(\lambda)}}_{V_1} \oplus V_2, \dim(V_2) < n$ und

$\alpha = \alpha_1 \oplus \alpha_2, \alpha_i := \alpha|_{V_i}, i \in \{1,2\}$. Es folgt $\chi_\alpha = \chi_{\alpha_1} \cdot \chi_{\alpha_2}$, also zerfällt $\chi_{\alpha_2}$ in Linearfaktoren. Daher können wir die Induktionsvorraussetzung anwenden, was das gewünschte Resultat lierfert. □

**Satz 2.3.8:**

Sei $V$ $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\dim(V) < \infty$ und $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ sodass $\chi_A$ in Linearfaktoren zerfällt. Dann besitzt $\alpha$ Jordan-Normalform.

*Beweis.* Zerlege nach Satz 2.3.7 $V = \widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha(\lambda_1)} \oplus \dots \oplus \widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha(\lambda_r)}$ und $\alpha = \alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_r$. Da $\widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha(\lambda_i)} = \ker(\alpha - \lambda_i \,\mathrm{id})^{k_i}$ ist $\alpha_i - \lambda_i \,\mathrm{id} := \alpha|_{\widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha(\lambda_i)}} - \lambda \,\mathrm{id}\,|_{\widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha(\lambda_i)}}$ nilpotent. Nach Lemma 2.3.3 gibt es eine Basis $B_i$ von $\widetilde{\mathrm{Eig}_\alpha(\lambda_i)}$ sodass ${}_{B_i}M(\alpha_i)_{B_i}$ Jordan-Normalform hat. Es folgt mit $B = (B_1, \dots, B_r)$ dass

$$ {}_BM(\alpha)_B = \begin{pmatrix} {}_{B_1}M(\alpha_1)_{B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & {}_{B_r}M(\alpha_r)_{B_r} \end{pmatrix} \text{ Jordanmatrix ist.} $$ □

**Berechnung der Jordan-Normalform**

1. Berechne $\mathrm{spec}(\alpha) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$
2. a) Haupträume berechnen: Finde $k$ minimal mit
$$ \ker(\alpha - \lambda \,\mathrm{id})^{k+1} = \ker(\alpha - \lambda \,\mathrm{id})^k =: V_\lambda $$
   b) Für $1 \leq l \leq k$ bestimme $B_l = \{b_1^l, \dots, b_{r_l}^l\}$, sodass $(B_1, \dots, B_l)$ Basis von $\ker(\alpha - \lambda \,\mathrm{id})^l$.
3. a) Setze zunächst $v_i^k = b_i^k, i = 1, \dots, r_k$. $D_k := (v_1^k, \dots, v_{r_k}^k)$
   Setze $v_i^{k-1} := (\alpha - \lambda \,\mathrm{id})(v_i^k) \in \langle B_{k-1} \rangle, i = 1, \dots, r_k$
   Ergänze gegebenenfalls $(v_1^{k-1}, \dots, v_{r_k}^{k-1}, v_{r_{k+1}}^{k-1}, \dots, v_{r_{k-1}}^{k-1}) =: D_{k-1}$, sodass $\langle D_{k-1} \rangle = \langle B_{k-1} \rangle$
   b) Führe 3a) iterativ aus.
   Setze $v_i^{l-1} := (\alpha - \lambda \,\mathrm{id})(v_i^l), i = 1, \dots, r_l$
   Ergänze gegebenenfalls $v_1^{l-1}, \dots, v_{r_l}^{l-1}, v_{r_{l+1}}^{l-1}, \dots, v_{r_{l-1}}^{l-1} =: D_{l-1}$, sodass $\langle D_{l-1} \rangle = \langle B_{l-1} \rangle$
4. Sei $B_\lambda = (D_1, \dots, D_k) \implies {}_{B_\lambda}M(\alpha|_{v_\lambda})_{B_\lambda}$ hat Jordan-Normalform mit Eigenwert $\lambda$.
5. Setze $B = (B_{\lambda_1}, \dots, B_{\lambda_r}) \implies {}_BM(\alpha)_B$ hat Jordan-Normalform.

**Beispiel**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^5$$

$$(A - 1 \cdot I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - I) = \left\langle (\underbrace{e_1, e_2}_{B_1}) \right\rangle$$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker((A - I)^2) = \left\langle (\underbrace{e_1, e_2}_{B_1}, \underbrace{e_3, e_4}_{B_2}) \right\rangle$$

$$(A - I)^3 = 0 \implies \ker((A - I)^3) = \left\langle (\underbrace{e_1, e_2}_{B_1}, \underbrace{e_3, e_4}_{B_2}, \underbrace{e_5}_{B_3}) \right\rangle$$

$$B_1 = (e_1, e_2), B_2 = (e_3, e_4), B_3 = (e_5)$$

$$\left.v_1^3 = e_5\right\} D_3$$

$$\left.\begin{aligned} v_1^2 &= (A - 1I)(v_1^3) = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_2^2 &= e_4 \end{aligned}\right\} D_2$$

$$\left.\begin{aligned} v_1^1 &= (A - I)(v_1^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_2^1 &= (A - I)(v_2^2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} D_1$$

$$(\overset{\in \ker(A-I)}{v_1^1}, \underset{A-I}{v_1^2}, \underset{A-I}{v_1^3}, \overset{\in \ker(A-I)}{v_1^1}, \underset{A-I}{v_2^2}) = B, \; {}_B M(A)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

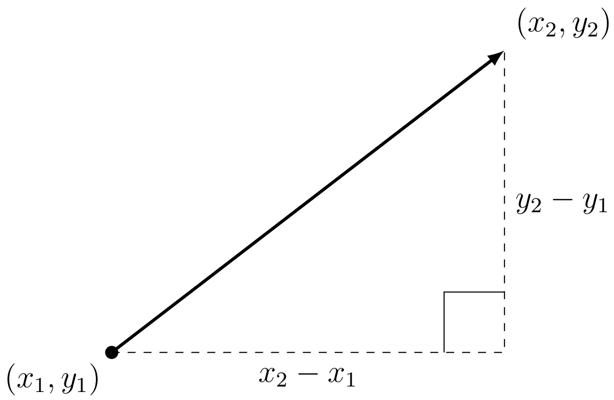
# Kapitel 3

# Euklidische und Unitäre Vektorräume

### Motivation

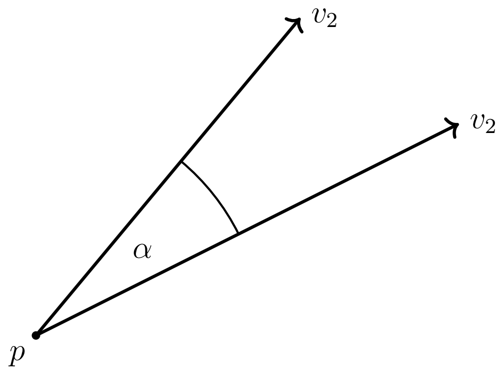
Wir wollen Geometrie betreiben und Längen beziehungsweise Winkel messen können.

### Länge




$$\mathbb{R}^2\colon P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|$$

**Winkel**




$v_1 = (u_1, w_1), v_2 = (u_2, w_2), v = (u, w)$
$\cos(\alpha) = \dfrac{u_1 u_2 + w_1 w_2}{|w_1|\,|w_2|}$ $|v| = \sqrt{u^2 + w^2}$
$v_1 \cdot v_2 = u_1 u_2 + w_1 w_2$ skalares Produkt
$\implies d(P_1, P_2) = \sqrt{\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}}, \cos(\sphericalangle v_1 v_2) = \dfrac{v_1 v_2}{|v_1|\,|v_2|}$

## 3.1 Skalarprodukte und Hermitesche Formen

Zunächst sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

**Definition 3.1.1:**
Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$. $\beta$ heißt

- bilinear (Bilinearform) wenn $\forall u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \beta(u + v, w) &= \beta(u, w) + \beta(v, w), \\ \beta(u, v + w) &= \beta(u, v) + \beta(u, w), \\ \beta(\lambda u, v) &= \lambda\beta(u, v) = \beta(u, \lambda v) \end{aligned}$$

- symmetrisch wenn $\forall u, v \in V\colon \beta(u, v) = \beta(v, u)$
- positiv definit wenn $\forall v \in V \setminus \{0\}\colon \beta(v, v) > 0$
- skalares Produkt wenn $\beta$ symmetrisch, positiv definit (spd) und bilinear ist.

**Bemerkung**

$v = 0 \in V \implies 0 \cdot v = v \implies \beta(v, v) = \beta(0 \cdot v, v) = 0 \cdot \beta(v, v) = 0$

**Beispiele**

- Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n)$
  $\beta_1(v, w) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i w_i = v^T w$ ist symmetrische positiv definite Bilinearform.

- Sei $\dim(V) = n$ und $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis
  Sei für $v, w \in V$: $\begin{cases} {}_B\Phi(v) = (v_1, \dots, v_n) \\ {}_B\Phi(w) = (w_1, \dots, w_n) \end{cases}$
  $\beta_2(v, w) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i w_i = \beta_1({}_B\Phi(v), {}_B\Phi(w))$ ist spd.

- $V = \mathbb{R}^2, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
  $\beta_3(v, w) = v^T A w \in \mathbb{R}$
  symmetrisch, weil
  $$\beta_3(v, w) = \beta_3(v, w)^T = (v^T A w)^T = w^T A^T v = w^T A v = \beta_3(w, v) \checkmark$$
  $\beta_3(u, v) = 4v_1w_1 - 2v_1w_2 - 2v_2w_1 + 3v_2w_2 \implies \beta(v, v) = (2v_1 - v_2)^2 + 2v_2^2 = 0 \implies$
  $v_2 = 0 \implies (2v_1)^2 = 0 \implies v_1 = 0$

- Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b, V = \{f \colon [a, b] \to \mathbb{R} \colon f \text{ stetig}\}$
  Sei $h \in V \colon h(t) > 0 \forall t \in [a, b]$
  $$\beta_4(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)h(t)dt \text{ bilinear, symmetrisch}$$
  $$\beta_4(f, f) = \int_a^b |f(t)|^2 h(t)dt = 0 \implies f = 0$$

**Definition 3.1.2:**
Ein Vektorraum mit skalarem Produkt heißt Euklidischer Raum.
Man schreibt oft $u \cdot v, \langle u, v \rangle$ anstatt $\beta(u, v)$.

Nun sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

**Definition 3.1.3:**
Sei $V$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\beta \colon V \times V \to \mathbb{C}$. $\beta$ heißt hermitesche Form wenn für alle $u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{C}$:

i) $\beta(u + v, w) = \beta(u, w) + \beta(v, w)$

ii) $\beta(\lambda u, v) = \lambda \beta(u, v)$

iii) $\beta(u, v) = \overline{\beta(v, u)}$

**Lemma 3.1.4:**

Sei $\beta$ hermitesche Form

a) $\beta(u, v+w) = \beta(u,v) + \beta(u,w)$

b) $\beta(u, \lambda v) = \overline{\lambda}\beta(u,v)$

c) $\beta(u,u) \in \mathbb{R}$

*Beweis.* a) $\beta(u, v+w) \overset{\text{iii}}{=} \overline{\beta(v+w,u)} \overset{\text{i}}{=} \overline{\beta(v,u)} + \overline{\beta(w,u)} \overset{\text{iii}}{=} \beta(u,v) + \beta(u,w)\checkmark$

b) $\beta(u, \lambda v) \overset{\text{iii}}{=} \overline{\beta(\lambda v, u)} \overset{\text{ii}}{=} \overline{\lambda} \cdot \overline{\beta(v,u)} \overset{\text{iii}}{=} \overline{\lambda}\beta(u,v)$

c) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$
$\beta(u,u) \overset{\text{iii}}{=} \overline{\beta(u,u)} \implies \beta(u,u) \in \mathbb{R}$ □

**Definition 3.1.5:**

Sei $\beta$ hermitesche Form.

- $\beta$ heißt positiv definit wenn $\forall v \in V \setminus \{0\}\colon \underbrace{\beta(v,v)}_{\in\mathbb{R}} > 0$
- Eine positiv definite hermitesche Form heißt skalares Produkt
- Ein komplexer Vektorraum mit einem skalaren Produkt heißt unitärer Raum.

**Beispiel**

$V = \mathbb{C}^n, u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n)$
$u \cdot v = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\overline{v_i}$ ist skalares Produkt

Wir zeigen nun, dass jeder euklidische Vektorraum in einen unitären Vektorraum eingebettet werden kann.

**Definition 3.1.6:**

Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

$$\begin{aligned}
&V_{\mathbb{C}} := \{(u,v)\colon u,v \in V\} \text{ [Schreibe } (u,v) =: u + \overset{i^2=-1}{i} \cdot v]\\
&(u_1,v_1) + (u_2,v_2) := (u_1+u_2, v_1+v_2) \text{ Addition}\\
&\lambda = (\gamma + i\delta) \in \mathbb{C}, \lambda \cdot (u,v) = (\gamma u - \delta v, \delta u + \gamma v) \text{ skalare Multiplikation}\\
&\lambda(u+iv) = (\gamma+i\delta)(u+iv) = \gamma u + i\gamma v + i\delta u - \delta v\\
&\quad = (\gamma u - \delta v) + i(\gamma v + \delta u)\\
&\quad \implies (V_{\mathbb{C}}, +, \cdot) \text{ ist } \mathbb{C}\text{-Vektorraum}
\end{aligned}$$

$V_{\mathbb{C}}$ heißt die <u>komplexe Erweiterung</u> von V.

$$\text{Einbettung: } \iota\colon \begin{cases} V \to V_{\mathbb{C}} \\ v \mapsto (v,0) = v + i \cdot 0 \end{cases}$$

**Lemma 3.1.7:**

a) $V$ ist durch die Einbettung $v \overset{\iota_V}{\mapsto} (v,0)$ "in $V_{\mathbb{C}}$ enthalten", das heißt $\iota_V$ ist injektiv.

b) Seien $V, W$ $\mathbb{R}$-Vektorräume, $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)$. Dann existiert eine eindeutige komplexe Erweiterung $\alpha_{\mathbb{C}} \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$ mit

$$\forall v \in V\colon \alpha_{\mathbb{C}}(\iota_V(v)) = \iota_W(\alpha(v))$$

*Beweis.* a) $\iota_V$ ist linear ✓
$\iota_V(v) = (0,0) \implies v = 0$ (injektiv)

b) Sei $\alpha_{\mathbb{C}}$ so eine Fortsetzung
$\alpha_{\mathbb{C}}(u+iv) = \alpha_{\mathbb{C}}(u) + i\alpha_{\mathbb{C}}(v) = \alpha(u) + i\alpha(v)$
$\alpha_{\mathbb{C}}((u,v)) = (\alpha(u), \alpha(v))$ Dadurch ist $\alpha_{\mathbb{C}}$ eindeutig bestimmt! □

**Definition 3.1.8:**

$\alpha_{\mathbb{C}}$ heißt die komplexe Forsetzung von $\alpha$

Auch skalare Produkte können eindeutig fortgesetzt werden.

**Satz 3.1.9:**

Sei $(V, \beta)$ euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann existiert genau eine hermitesche Form $\beta_{\mathbb{C}}$ auf $V_{\mathbb{C}}$, welche $\beta$ fortsetzt:

$$\forall v, w \in V\colon \beta_{\mathbb{C}}(\iota_V(v), \iota_V(w)) = \beta(v, w)$$

*Beweis.* Ein solches $\beta_{\mathbb{C}}$ muss erfüllen, dass

$$\begin{aligned}\beta_{\mathbb{C}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) &= \beta_{\mathbb{C}}(u_1, u_2 + iv_2) + i\beta_{\mathbb{C}}(v_1, u_2 + iv_2) \\ &= \beta_{\mathbb{C}}(u_1, u_2) + i\beta_{\mathbb{C}}(v_1, u_2) \underset{\text{3.1.4 b)}}{-} i\beta_{\mathbb{C}}(u_1, v_2) + \beta_{\mathbb{C}}(v_1, v_2) \\ &= \beta(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2) + i(\beta(v_1, u_2) - \beta(u_1, v_2))\end{aligned}$$

und dadurch ist $\beta_{\mathbb{C}}$ eindeutig bestimmt. □

**Satz 3.1.10 (Cauchy-Schwarz):**

Für $u, v$ in einem euklidischen/unitären Vektorraum $V$ gilt

$$|\langle u, v\rangle|^2 \leq \langle u, u\rangle \cdot \langle v, v\rangle$$

Gleichheit gilt genau wenn $u, v$ linear abhängig sind.

*Beweis.* $v = 0$✓
$v \neq 0 \implies \langle v, v\rangle > 0$
Sei $\lambda \in \mathbb{C} \implies$

$$\begin{aligned}0 &\leq \langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle \\ &= \langle u, u - \lambda v\rangle - \lambda \langle v, u - \lambda v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle - \overline{\lambda} \langle u, v\rangle - \lambda \langle v, u\rangle + \underbrace{\lambda\overline{\lambda}}_{=|\lambda|^2} \langle v, v\rangle\end{aligned}$$

Sei $\lambda := \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}, \overline{\lambda} = \frac{\overline{\langle u, v\rangle}}{\overline{\langle v, v\rangle}} = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle v, v\rangle}$, so folgt

$$\begin{aligned}0 &\leq \langle u, u\rangle - \frac{\langle v, u\rangle \langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} - \frac{\langle u, v\rangle \langle v, u\rangle}{\langle v, v\rangle} + \frac{\cancel{\langle v, v\rangle} \langle u, v\rangle \langle v, u\rangle}{\langle v, v\rangle^{\cancel{2}}} \\ &= \langle u, u\rangle - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\langle v, v\rangle} \\ &\implies 0 \leq \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle - |\langle u, v\rangle|^2 \\ &\implies \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle \geq |\langle u, v\rangle|^2 .\end{aligned}$$

Gleichheit gilt, wenn $\langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle = 0$, also $u, v$ linear abhängig. □

**Definition 3.1.11:**

Man nennt

- $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die Länge oder die Norm von $v \in V$.
- $\cos(\sphericalangle vw) := \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$ der Kosinus des Winkels zwischen $v, w \in V$.
  (Wegen Satz 3.1.10 ist $\cos(\sphericalangle vw) \leq 1$ und damit auch $\sphericalangle vw$ wohldefiniert!)
- $v \in V$ heißt normiert wenn $\|v\| = 1$

**Satz 3.1.12:**

$\|\cdot\|$ ist eine Norm, das heißt

a) $\|v\| \geq 0$

b) $\|v\| = 0 \implies v = 0$

c) $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$

d) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

*Beweis.* a) $\|v\| = (\underbrace{\langle v, v\rangle}_{\in[0,\infty)})^{\frac{1}{2}} \geq 0$

b) $\|v\| = 0 \implies \|v\|^2 = 0 \implies \langle v, v\rangle = 0 \implies v = 0$

c) $\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \|\lambda\|^2 \langle v, v\rangle = |\lambda|^2 \|v\|^2$

d)

$$\begin{aligned}
\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v\rangle \\
&= \langle u, u + v\rangle + \langle v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \overline{\langle u, v\rangle} + \langle v, v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle + 2\mathfrak{Re}(\langle u, v\rangle) + \langle v, v\rangle \\
&\leq \langle u, u\rangle + 2\,|\langle u, v\rangle| + \langle v, v\rangle \\
&\leq \langle u, u\rangle + 2\,\|u\|\,\|v\| + \langle v, v\rangle \\
&= \|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2
\end{aligned}$$

□

**Definition 3.1.13:**

Sei $V = (v_1, \ldots, v_k)$ mit $\forall i \in [k]\colon v_i \neq 0$.

- $v, w$ heißen <u>orthogonal</u>, wenn $\langle v, w\rangle = 0$ [schreibe auch $v \perp w$]
- $V$ heißt <u>Orthogonalsystem</u> (OS), wenn $\forall i, j \in [k], i \neq j \colon v_i \perp v_j$
- $V$ heißt <u>Orthonormalsystem</u> (ONS), wenn $V$ ein Orthogonalsystem ist und $\forall i \in [k] \colon \; \|v_i\| = 1$
- $V$ heißt <u>Orthogonalbasis</u> (OB), wenn $V$ ein Orthogonalsystem und eine Basis ist.
- $V$ heißt <u>Orthonormalbasis</u> (ONB), wenn $V$ ein Orthonormalsystem und eine Basis ist.

**Satz 3.1.14:**
Sei $(v_1, \dots, v_k)$ ein Orthogonalsystem. Dann ist $(v_1, \dots, v_k)$ linear unabhängig.

*Beweis.* Angenommen $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$

$$\forall i \in [k] \colon 0 = \lambda_1 \underbrace{\langle v_1, v_i\rangle}_{=0} + \dots + \lambda_i \underbrace{\langle v_i, v_i\rangle}_{\neq 0} + \dots + \lambda_k \underbrace{\langle v_k, v_i\rangle}_{=0} = \lambda_i \underbrace{\|v_i\|^2}_{\neq 0}$$

$\implies \lambda_i = 0$ □

**Satz 3.1.15:**
Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ Orthonormalbasis von $V, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann gilt für alle $v, w \in V$ und $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = {}_B\Phi(v), (\mu_1, \dots, \mu_n) = {}_B\Phi(w)$:

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_i}$$

Weiters gilt $\lambda_i = \langle v, b_i\rangle, b_i^*(v) = \langle v, b_i\rangle$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} &\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij} \\ &\left.\begin{aligned} v &= \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \\ w &= \textstyle\sum_{i=1}^n \mu_i b_i \end{aligned}\right\} \implies \langle v, w\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \lambda_i b_i, \mu_j b_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_j} \langle b_i, b_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_i} \\ &{}_B\Phi(b_i) = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0) \implies \langle v, b_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i \end{aligned}$$

□

**Satz 3.1.16 (Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren):**
Sei $(a_1, a_2, \dots) \subseteq V$ linear unabhängig. Dann existiert genau ein Orthonormalsystem $(b_1, b_2, \dots)$ mit

i) $\forall k\colon \langle a_1, \dots, a_k\rangle = \langle b_1, \dots, b_k\rangle =: U_k$

ii) Die Basistransformationsmatrix $M_k$ zwischen der Basen $(a_1, \dots, a_k)$ und $(b_1, \dots, b_k)$ von $U_k$ hat positive Determinante.

*Beweis.* $b_1, b_2, \dots$ werden induktiv definiert.

- $b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$, $M_1 = \left(\frac{1}{\|a_1\|}\right)$
  Eindeutigkeit: Sei $\tilde{b}_1$ mit i), ii) $\implies \tilde{b}_1 = c \cdot a_1, 1 = \left\|\tilde{b}_1\right\| = \|c \cdot a_1\| = |c|\,\|a_1\|$
  $\implies |c| = \dfrac{1}{\|a_1\|} \implies \tilde{M}_k = (c)$
- $(b_1, \dots, b_n)$ schon konstruiert mit i), ii)
  Sei $c_{n+1} := a_{n+1} - \sum\limits_{j=1}^{n} \langle a_{n+1}, b_j\rangle\, b_j$

$$\forall i \in [n]\colon \langle c_{n+1}, b_i\rangle = \langle a_{n+1}, b_i\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle a_{n+1}, b_j\rangle \underbrace{\langle b_j, b_i\rangle}_{\delta_{ij}}$$
$$= \langle a_{n+1}, b_i\rangle - \langle a_{n+1}, b_i\rangle = 0 \implies c_{n+1} \perp \langle b_1, \dots, b_n\rangle$$

$b_{n+1} = \dfrac{c_{n+1}}{\|c_{n+1}\|} \implies (b_1, \dots, b_{n+1})$ Orthonormalsystem mit
$\langle b_1, \dots, b_n\rangle = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$

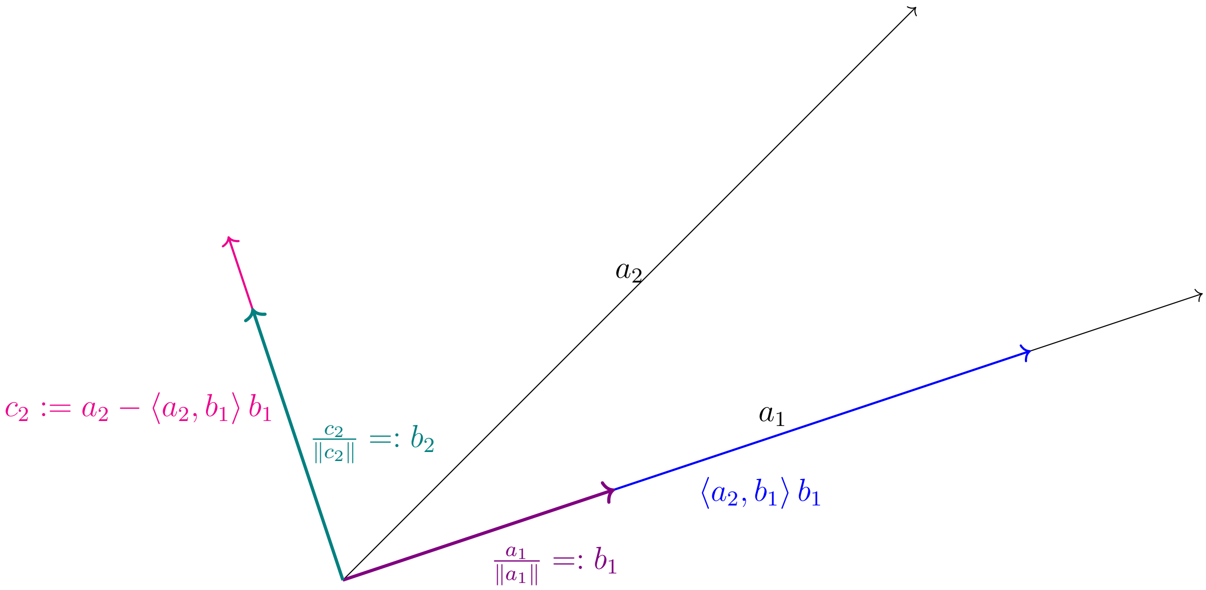
$$\begin{aligned}
&b_1 = \mu_{11} a_1\\
&b_2 = \mu_{21} a_1 + \mu_{22} a_2\\
&b_3 = \mu_{31} a_1 + \mu_{32} a_2 + \mu_{33} a_3\\
&\vdots\\
&b_n = \mu_{n1} a_1 + \dots + \mu_{nn} a_n\\
&b_{n+1} = \mu_{n+11} a_1 + \dots + \mu_{n+1n} a_n + \frac{1}{\|c_{n+1}\|} a_{n+1}\\
&\implies \det(\mu_{ij}) = \det(M_n) \cdot \frac{1}{\|c_{n+1}\|} > 0
\end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Sei $\tilde{b}_{n+1}$ ein weiterer Vektor mit i), ii)

$$\begin{aligned}
&\implies \tilde{b}_{n+1} = \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_n b_n + \mu b_{n+1} \\
&\forall i \in [n]\colon 0 = \left\langle \tilde{b}_{n+1}, b_i \right\rangle = \mu_i \implies \tilde{b}_{n+1} = \mu b_{n+1} \\
&1 = \left\| \tilde{b}_{n+1} \right\| = |\mu| \, \|b_{n+1}\| = |\mu| \implies |\mu| = 1 \\
&\det(\tilde{M}_{n+1}) = \det(M_n) \cdot \mu > 0 \implies \mu = 1 \wedge \tilde{b}_{n+1} = b_{n+1}
\end{aligned}$$

□

**Veranschaulichung im $\mathbb{R}^2$**




**Beispiel**

$$V = \mathbb{R}^4, a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\|a_1\|} a_1, \ \|a_1\| = (4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \langle a_2, b_1 \rangle = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(8 + 4 + 8 + 5)^{\frac{1}{2}} = \frac{25}{5} \\
c_2 &= a_2 - \underbrace{\langle a_2, b_1 \rangle}_{5} b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\|c\|_2 = (4+4+16) = \sqrt{24}$$

$$\implies b_2 = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$c_3 = a_3 - \langle a_3, b_1 \rangle\, b_1 - \langle a_3, b_2 \rangle\, b_2 = \cdots = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|c_3\| = (4+36+4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{44}$$

$$\implies b_3 = \frac{1}{\sqrt{44}} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Satz 3.1.17:**

Sei $V$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum mit höchstens abzählbarer Dimension. Dann kann jedes Orthonormalsystem zu einer Orthonormalbasis von $V$ ergänzt werden.

*Beweis.* Sei $(b_1, \dots, b_k)$ ein Orthonormalsystem, $(b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots)$ eine Basis.
Satz 3.1.16 $\implies \exists b_{k+1}, b_{k+2}, \dots$ mit $(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots)$ Orthonormalbasis. □

**Definition 3.1.18:**

- $M, N \subseteq V$ heißen <u>orthogonal</u> wenn $\forall v \in M, w \in N \colon \underset{\langle v,w\rangle = 0}{v \perp w}$

  Wir schreiben $M \perp N$
  $[M = v \implies v \perp N]$

- Für $M \subseteq V$ heißt

  $$M^\perp := \{v \in V : v \perp M\} = \{v \in V : \forall w \in M \colon \langle v, w \rangle = 0\}$$

  <u>orthogonales Komplement</u> von M

**Bemerkung**

$M^\perp$ ist immer Unterraum von $V$. Selbst, wenn $M$ kein Unterraum ist.

**Satz 3.1.19:**

Sei $U$ $r$-dimensionaler Unterraum von $n$-dimensionalem euklidischen/ unitären Vektorraum $V$. Dann gilt:

a) $\dim(U^\perp) = n - r$

b) $(U^\perp)^\perp = U$

c) $V = U \oplus U^\perp$

*Beweis.* a) $(b_1, \dots, b_r)$ Orthonormalbasis von $U$.
$(b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n)$ Orthonormalbasis von $V$.
[die existiert laut Satz 3.1.17]
Behauptung: $U^\perp = \langle b_{r+1}, \dots, b_n \rangle$
Beweis: $\subseteq$: Sei $v \in U^\perp, v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$

$$\forall i \in [r] \colon 0 = \langle v, b_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j, b_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \underbrace{\langle b_j, b_i \rangle}_{\delta_{ij}} = \lambda_i$$

$\supseteq$: $v \in \langle b_{r+1}, \dots, b_n \rangle \overset{!}{\implies} v \in U^\perp$
$\implies \sum_{j=r+1}^n \lambda_j b_j, u = \sum_{i=1}^r \mu_i b_i \in U$
$\implies \langle v, u \rangle = \sum_{j=r+1}^n \lambda_j \sum_{i=1}^r \underbrace{\langle b_j, b_i \rangle}_{=0} = 0$

$\implies$ a)

b)

$U \subseteq (U^\perp)^\perp$: Sei $v \in U \implies \forall w \in U^\perp \colon \langle w, v \rangle = 0 \implies v \in (U^\perp)^\perp$

$(U^\perp)^\perp \subseteq U$: $\dim((U^\perp)^\perp) \overset{\text{a)}}{=} n - \dim(U^\perp) \overset{\text{a)}}{=} n - (n - r) = r = \dim(U)$

c) $U \oplus U^\perp$: Sei $w \in U \cap U^\perp \implies \langle w, w \rangle = 0 \implies w = 0$ $\square$

**Bemerkung**

$U = (U^\perp)^\perp$ gilt im Allgemeinen nicht, wenn $\dim(V) = \infty$.

**Beispiel**

$V = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{R},\ \text{stetig}\}, \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt$
$U = \{p \in V : p \text{ ist Polynom}\}$
$(p_1, p_2, \dots)$ ist eine Orthonormalbasis von $U$.
Wir zeigen: $U^\perp = \{0\} \implies (U^\perp)^\perp = V \neq U$

**Satz (Weierstraß):**
$\forall f \in V, \varepsilon > 0\ \exists p \in U \colon \|f - p\|_\infty \leq \varepsilon$
Beweis wird hier nicht geführt.

Sei $f \in V \setminus \{0\}, a := \|f\|^2 = \langle f, f \rangle, b = \|f\|_\infty$. Sei $p \in U\colon \|f - p\|_\infty < \frac{a}{2b}$
Behauptung: $\langle f, p \rangle > 0$

$$\begin{aligned}\langle f, p \rangle = \int_0^1 f(t)p(t)dt &= \int_0^1 f(t)[f(t) - (f(t) - p(t))]dt \\ &= \int_0^1 f(t)f(t)dt - \int_0^1 f(t)(f(t) - p(t))dt \\ &= a - \int_0^1 f(t)[f(t) - p(t)]dt\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \underbrace{f(t)}_{\substack{\le \|b\|_\infty \\ \le b}} \underbrace{[f(t) - p(t)]}_{\substack{\le \|f-p\|_\infty \\ \le \frac{a}{2b}}} \le \int_0^1 b \cdot \frac{a}{2b} dt - \int_0^1 \frac{a}{2} dt = \frac{a}{2}$$

$$\forall f \in V\colon \exists p \in U\colon \int_0^1 f(t)p(t)dt \neq 0 \implies U^\perp = \{\} \implies U \subsetneq (U^\perp)^\perp$$

## 3.2 Adjungierte Abbildungen und normale Endomorphismen

**Definition 3.2.1:**

Seien $V, W$ euklidische/unitäre Vektorräume, $\alpha \in \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(V, W), \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
$\alpha^* \in \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(W, V)$ heißt <u>zu $\alpha$ adjungiert</u>, falls

$$\forall v \in V\colon \forall w \in W\colon \langle \alpha(v), w \rangle_W = \langle v, \alpha^*(w) \rangle_V$$

$V = W$: Gilt $\begin{matrix}\alpha = -\alpha^* \\ \alpha = \alpha^*\end{matrix}$, so heißt $\alpha$ $\begin{matrix}\underline{\text{anti-selbstadjungiert}} \\ \underline{\text{selbstadjungiert}}\end{matrix}$.

**Bemerkung**

- $\alpha^*$ muss nicht existieren!
  Beispiel: $U, V$ wie vorher. $\alpha \in \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(U, V), \alpha(p) = p \forall p \in U$
  Angenommen $\exists \alpha^* \in \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V, U), e(t) = e^t \implies e \in V$
  $\alpha^*(e) = a_1p_1 + \dots + a_mp_m$
  $f := e - (a_1p_1 + \dots + a_mp_m) = e - \alpha^*(e) \neq 0$
  Behauptung: $f \in U^\perp (\implies f = 0 \lightning)$

- $i \in \{m+1, m+2, \dots\}$

$$\begin{aligned}&\langle e, p_i \rangle = \langle e, \alpha(p_i) \rangle = \langle \alpha^*(e), p_i \rangle = \langle a_1p_1 + \dots + a_mp_m, p_i \rangle = 0 \\ &\implies \forall i = m+1, m+2, \dots\colon \langle f, p_i \rangle = 0\end{aligned}$$

  Außerdem: $i \in [m]\colon \langle e, p_i \rangle = \langle \alpha^*, p_i \rangle$
  $\implies \langle f, p_i \rangle = \langle e - \alpha^*(e), p_i \rangle = \langle \alpha^*(e) - \alpha^*(e), p_i \rangle = 0$
  $\implies \langle f, p_i \rangle \forall i = 1, 2, \cdots \implies f \in U^\perp \implies f = \{0\} \lightning$

- Wenn $\alpha^*$ existiert, dann ist $\alpha^*$ eindeutig.

**Lemma 3.2.2:**

Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), \dim(V) < \infty$ Dann existiert $\alpha^*$:
Mit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ Orthonormalbasis von $\underbrace{V}_{\text{Existenz gegeben wegen Satz 3.1.17}}$ gilt:

$$\alpha^*(w) := \sum_{i=1}^{n} \langle w, \alpha(e_i) \rangle\, e_i$$

*Beweis.* Zu Zeigen: $\forall v \in V, w \in W\colon\ \langle \alpha(v), w \rangle = \langle v, \alpha^*(w) \rangle$.
O.B.d.A.: $v = e_j$ für $j \in [n]$

$$\begin{aligned}
\langle v, \alpha^*(w) \rangle = \left\langle e_j, \sum_{i=1}^{n} \langle w, \alpha(e_i) \rangle\, e_i \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_j, \langle w, \alpha(e_i) \rangle\, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle w, \alpha(e_i) \rangle}\, \underbrace{\langle e_j, e_i \rangle}_{\delta_{ij}} \\
&= \overline{\langle w, \alpha(e_j) \rangle} = \langle \alpha(e_j), w \rangle = \langle \alpha(v), w \rangle
\end{aligned}$$

□

**Definition 3.2.3:**

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

| | |
|---|---|
| $\overline{A} := (\overline{a}_{ij})_{i,j}$ | zu $A$ <u>konjugiert komplexe</u> Matrix |
| $A^* = (\overline{A})^T$ | zu $A$ <u>adjungierte</u> Matrix |

**Satz 3.2.4:**

Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, \dim(V), \dim(W) < \infty$

$$\left.\begin{aligned} E &= \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ ONB von V} \\ F &= \{f_1, \ldots, f_n\} \text{ ONB von W} \end{aligned}\right\} \implies {}_E M(\alpha^*)_F = ({}_F M(\alpha)_E)^*$$

*Beweis.*

$$A = {}_F M(\alpha)_E = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n}}, \; B = {}_E M(\alpha^*)_F = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$$

$$\alpha(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

$$F \text{ ONB} \implies a_{ij} = \langle \alpha(e_j), f_i \rangle$$

$$\alpha^*(f_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i \implies b_{ij} = \langle \alpha^*(f_j), e_i \rangle$$

$$\dots = \overline{\langle e_i, \alpha^*(f_j) \rangle} = \overline{\langle \alpha(e_i), f_j \rangle} = \overline{a_{ji}}$$

$$\implies B = A^*$$

□

**Lemma 3.2.5:**

a) $(\alpha^*)^* = \alpha$

b) $(\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*$

c) $(\lambda\alpha)^* = \overline{\lambda}\alpha^*$

d) $(\beta \circ \alpha)^* = \alpha^* \circ \beta^*$

e) $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V), \dim(V) < \infty \implies \det(\alpha) = \overline{\det(\alpha^*)}$

*Beweis.* a) $\langle \alpha(v), w \rangle = \langle v, \alpha^*(w) \rangle = \overline{\langle \alpha^*(w), v \rangle} = \overline{\langle w, (\alpha^*)^*(v) \rangle} = \left\langle (\alpha^*)^*(v), w \right\rangle \; \forall v \in V, w \in W$
$\implies \left\langle \alpha(v) - (\alpha^*)^*(v), w \right\rangle = 0 \; \forall v \in V, w \in W, \; w := \alpha(v) - (\alpha^*)^*(v)$
$\implies \left\langle \alpha(v) - (\alpha^*)^*(v), \alpha(v) - (\alpha^*)^*(v) \right\rangle = 0 \iff \left\| \alpha(v) - (\alpha^*)^*(v) \right\| = 0 \implies \forall v \in V : \alpha(v) = (\alpha^*)^*(v)$

b)

$$\begin{aligned} \langle (\alpha + \beta)(v), w \rangle = \langle v, (\alpha + \beta)^*(w) \rangle &= \langle \alpha(v) + \beta(v), w \rangle \\ &= \langle \alpha(v), w \rangle + \langle \beta(v), w \rangle = \langle v, \alpha^*(w) \rangle + \langle v, \beta^*(w) \rangle \\ &= \langle v, \alpha^*(w) + \beta^*(w) \rangle \end{aligned}$$

c) $\langle (\lambda\alpha)(v), w \rangle = \langle v, (\lambda\alpha)^*(w) \rangle$
$= \lambda \langle \alpha(v), w \rangle = \lambda \langle v, \alpha^*(w) \rangle = \left\langle v, \overline{\lambda}\alpha^*(w) \right\rangle$

d) $\langle \beta \circ \alpha(v), w \rangle = \langle \alpha(v), \beta^*(w) \rangle = \langle v, \alpha^* \circ \beta^*(w) \rangle$
$= \langle v, (\beta \circ \alpha)^*(w) \rangle$

e) Sei $E$ Orthonormalbasis, $A = {}_E M(\alpha)_E = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{\mathrm{n} \times \mathrm{n}}$

$$\overline{\det(\alpha)} = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \overline{a}_{1\pi(1)} \cdots \overline{a}_{n\pi(n)} = \det(\overline{A}) = \det(\overline{A}^T) = \det(A^*)$$

$= \det({}_E M(\alpha^*)_E) = \det(\alpha^*)$ □

**Definition 3.2.6:**

$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ mit $V$ euklidisch/unitär heißt <u>normal</u>, wenn $\alpha^*$ existiert und

$$\alpha \circ \alpha^* = \alpha^* \circ \alpha$$

**Satz 3.2.7:**

$$\alpha \text{ normal} \iff \langle \alpha(v), \alpha(w) \rangle = \langle \alpha^*(v), \alpha^*(w) \rangle$$

*Beweis.* $\implies$ : $\langle \alpha(v), \alpha(w) \rangle = \langle v, \alpha^*(\alpha(w)) \rangle \underbrace{=}_{\alpha \text{ normal}} \langle v, \alpha(\alpha^*(w)) \rangle$

$$\langle \alpha^*(v), \alpha^*(w) \rangle = \left\langle v, (\alpha^*)^*(\alpha^*(w)) \right\rangle = \langle v, \alpha(\alpha^*(w)) \rangle$$ □

**Lemma 3.2.8:**

$$\alpha \text{ normal} \implies \ker(\alpha) = \ker(\alpha^*)$$

*Beweis.*

$$\|\alpha(v)\|^2 = \langle \alpha(v), \alpha(v) \rangle = \langle \alpha^*(v), \alpha^*(v) \rangle = \|\alpha^*(v)\|^2$$
$$v \in \ker(\alpha) \iff \alpha(v) = 0 \iff \|\alpha(v)\| = 0 \iff \|\alpha^*(v)\| = 0$$
$$\iff \alpha^*(v) = 0 \iff v \in \ker(\alpha^*)$$ □

**Satz 3.2.9:**

$\alpha$ normal:

a) $\alpha$ und $\alpha^*$ besitzen die selben Eigenvektoren.

b) $v \in \mathrm{Eig}_\alpha(\lambda) \implies v \in \mathrm{Eig}_{\alpha^*}(\overline{\lambda})$

*Beweis.* $v \in \mathrm{Eig}_\alpha(\lambda)$

$$\begin{aligned}
\|\alpha(v) - \lambda v\|^2 &= \langle \alpha(v) - \lambda v, \alpha(v) - \lambda v\rangle \\
&= \langle \alpha(v), \alpha(v)\rangle - \lambda \langle v, \alpha(v)\rangle - \overline{\lambda} \langle \alpha(v), v\rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle v, v\rangle \\
&\underbrace{=}_{\alpha \text{ normal}} \langle \alpha^*(v), \alpha^*(v)\rangle - \lambda\overline{\langle \alpha(v), v\rangle} - \overline{\lambda} \langle v, \alpha^*(v)\rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle v, v\rangle \\
&= \langle \alpha^*(v), \alpha^*(v)\rangle - \lambda\overline{\langle v, \alpha^*(v)\rangle} - \overline{\lambda} \langle v, \alpha^*(v)\rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle v, v\rangle \\
&= \langle \alpha^*(v), \alpha^*(v)\rangle - \lambda \langle \alpha^*(v), v\rangle - \overline{\lambda} \langle v, \alpha^*(v)\rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle v, v\rangle \\
&= \left\langle \alpha^*(v) - \overline{\lambda} v, \alpha^*(v) - \overline{\lambda} v\right\rangle = \left\|\alpha^*(v) - \overline{\lambda} v\right\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&v \in \mathrm{Eig}_\alpha(\lambda) \iff \alpha(v) - \lambda v = 0 \iff \|\alpha(v) - \lambda v\|^2 = 0 \\
&\iff \left\|\alpha^*(v) - \overline{\lambda} v\right\|^2 = 0 \iff \alpha^*(v) - \overline{\lambda} v = 0 \iff v \in \mathrm{Eig}_{\alpha^*}(\overline{\lambda})
\end{aligned}$$

□

**Satz 3.2.10 (Spektralsatz für normale Abbildungen):**
$\alpha \in \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V, V), V$ unitär mit $\dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$\exists \text{ Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von } \alpha \iff \alpha \text{ normal}$$

*Beweis.* $\Longleftarrow$ : $\alpha$ normal

$n = 1$: $\exists$ Eigenvektor $e_1 \in V \setminus \{0\}$ mit $\alpha(e_1) = \lambda e_1$.
o.B.d.A.: $\|e_1\| = 1 \implies v$ ist Orthonormalbasis aus Eigenvektoren

$n - 1 \to n$: $\exists$ Eigenvektor $e_1 \in V \setminus \{0\}$ mit $\alpha(e_1) = \lambda e_1$.
o.B.d.A.: $\|e_1\| = 1,\ U = \langle e_1\rangle^\perp$

$$* \ V = \langle e_1\rangle \oplus U, \alpha(U) \overset{!}{\subseteq} U, \alpha(\langle e_1\rangle) \overset{\checkmark}{\subseteq} \langle e_1\rangle$$

$$\implies \alpha = \alpha|_{\langle e_1\rangle} \oplus \alpha|_U$$

Sei $v \in U \implies 0 = \langle v, e_1\rangle \quad [e_1 \in \mathrm{Eig}_\alpha(\lambda) \iff e_1 \in \mathrm{Eig}_{\alpha^*}(\overline{\lambda})]$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(v), e_1\rangle &= \langle v, \alpha^*(e_1)\rangle = \left\langle v, \overline{\lambda} e_1\right\rangle \\
&= \lambda \langle v, e_1\rangle = 0
\end{aligned}$$

$$\implies \alpha(v) \in U \implies \alpha(U) \subseteq U\checkmark$$

$$\implies \alpha|_U \in \mathrm{Hom}(U, U), \dim(U) = n - 1$$

$$\overset{\text{Induktionsvorraussetzung}}{\implies} \exists \text{ ONB } (e_2, \ldots, e_n) \text{ von } U \text{ aus Eigenvektoren von } \alpha$$

$$\implies (e_1, \ldots, e_n) \text{ ist ONB von } V \text{ aus Eigenvektoren von } \alpha$$

$\Longrightarrow$: Sei $(e_1, \dots, e_n)$ Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $\alpha$. Seien weiters $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die zugehörigen Eigenwerte.

$$\alpha\colon \begin{cases} V & \to V \\ v = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i & \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i e_i \end{cases}$$

Definiere

$$\beta\colon \begin{cases} V & \to V \\ v = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i & \mapsto \sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i} \mu_i e_i \end{cases} \implies \beta = \alpha^*$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha^*(\alpha(v)) &= \alpha^*(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i e_i) = \sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i} \lambda_i \mu_i e_i = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \mu_i e_i \\ \alpha(\alpha^*(v)) &= \alpha(\sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i} \mu_i e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{\lambda_i} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \mu_i e_i \end{aligned}\right\} \implies \alpha \text{ normal}$$

□

**Bemerkung**

Im Reellen/Euklidischen Fall gilt dieser Satz genau dann, wenn $\alpha$ diagonalisierbar ist.

**Satz 3.2.11:**

Sei $V$ ein unitärer Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ selbstadjungiert. (Das heißt $\alpha = \alpha^*$)
Dann gilt:

a) Alle Eigenwerte von $\alpha$ sind reell.

b) $V$ besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $\alpha$.

c) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal.

*Beweis.* $\alpha$ ist normal: $\alpha \circ \alpha^* = \alpha \circ \alpha = \alpha^* \circ \alpha$

a) Sei $\lambda$ Eigenwert von $\alpha$ mit Eigenvektor $v \in V \setminus \{0\}$
$\overset{3.2.7}{\Longrightarrow}$ $v$ ist Eigenvektor von $\alpha^*$ mit Eigenwert $\overline{\lambda}$
$\implies \lambda v = \alpha(v) = \alpha^*(v) = \overline{\lambda} v \implies (\lambda - \overline{\lambda})v = 0 \overset{v \neq 0}{\Longrightarrow} \lambda = \overline{\lambda}$
$\implies \lambda \in \mathbb{R}$

b) Folgt direkt aus Satz 3.2.10 & $\alpha$ normal.

c) Sei $\alpha(v_1) = \lambda_1 v_1, \alpha(v_2) = \lambda_2 v_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle \alpha(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, \alpha^*(v_2) \rangle = \langle v_1, \alpha(v_2) \rangle \\ &= \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle \\ &\implies \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \implies \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.2.12:**

Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum und $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V)$ normal. Dann ist $\alpha_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}})$ auch normal.

*Beweis.* Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}(V,V), \alpha_{\mathbb{C}}$ die komplexe Erweiterung von $\alpha$. Seien weiters $v, v' \in V$ mit $v = u + iw, v' = u' + iw', u, w, u', w' \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_{\mathbb{C}}(v), \alpha_{\mathbb{C}}(v') \rangle &= \langle \alpha(u) + i\alpha(w), \alpha(u') + i\alpha(w') \rangle \\
&= \langle \alpha(u), \alpha(u') \rangle + i \langle \alpha(w), \alpha(u') \rangle - i \langle \alpha(u), \alpha(w') \rangle \\
&\qquad\qquad + (-i)(-i) \langle \alpha(w), \alpha(w') \rangle \\
&= \langle \alpha^*(u), \alpha^*(u') \rangle + i \langle \alpha^*(w), \alpha^*(u') \rangle - i \langle \alpha^*(u), \alpha^*(w') \rangle \\
&\qquad\qquad + (-i)(-i) \langle \alpha^*(w), \alpha^*(w') \rangle \\
&= \langle \alpha^*(u) + i\alpha^*(w), \alpha^*(u') \rangle + \langle \alpha^*(u) + i\alpha^*(w), i\alpha^*(w') \rangle \\
&= \langle \alpha^*(u) + i\alpha^*(w), \alpha^*(u') + i\alpha^*(w') \rangle \\
&= \langle (\alpha^*)_{\mathbb{C}}(v), (\alpha^*)_{\mathbb{C}}(v') \rangle
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Bleibt zu Zeigen, dass $(\alpha^*)_{\mathbb{C}} = (\alpha_{\mathbb{C}})^*$:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_{\mathbb{C}}(v), v' \rangle &= \langle \alpha(u) + i\alpha(w), u' + iw' \rangle \\
&= \langle \alpha(u), u' \rangle + i \langle \alpha(w), u' \rangle - i \langle \alpha(u), w' \rangle + i(-i) \langle \alpha(w), w' \rangle \\
&= \langle u, \alpha^*(u') \rangle + i \langle w, \alpha^*(u') \rangle - i \langle u, \alpha^*(w') \rangle + i(-i) \langle w, \alpha^*(w') \rangle \\
&= \langle u + iw, \alpha^*(u') \rangle + \langle u + iw, i\alpha^*(w') \rangle \\
&= \langle u + iw, \alpha^*(u') + i\alpha^*(w') \rangle = \langle v, (\alpha^*)_{\mathbb{C}}(v') \rangle
\end{aligned}$$

Das heißt $(\alpha^*)_{\mathbb{C}}$ ist tatsächlich die adjungierte Abbildung von $\alpha_{\mathbb{C}}$ und mit 3.2 folgt nach Satz 3.2.7, dass $\alpha_{\mathbb{C}}$ normal ist. □

**Lemma 3.2.13:**

Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum und $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V)$ normal. Sei $v_{\mathbb{C}} \in V_{\mathbb{C}}$ $\underbrace{\text{normierter}}_{\text{d.h. } \|v_{\mathbb{C}}\|_{V_{\mathbb{C}}}=1}$ Eigenvektor von $\alpha_{\mathbb{C}}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Dann ist $\overline{v_{\mathbb{C}}}$ normierter Eigenvektor von $\alpha_{\mathbb{C}}$ zu Eigenwert $\overline{\lambda}$. Insbesondere sind $v_{\mathbb{C}}, \overline{v_{\mathbb{C}}}$ orthogonal.

*Beweis.* Sei $u + iw \in V_{\mathbb{C}}$ mit $u, w \in V$. $\alpha_{\mathbb{C}}(u + iw) = \alpha(u) + i\alpha(w)$
$v_{\mathbb{C}} = u + iw$ ist normiert

$$\begin{aligned}
\implies 1 = \langle u + iw, u + iw \rangle &= \langle u, u \rangle_V + i \langle w, u \rangle_V - i \langle u, w \rangle_V + \langle w, w \rangle_V \\
&= \langle u, u \rangle_V + i \langle w, u \rangle_V - i \langle w, u \rangle_V + \langle w, w \rangle_V \\
&= \langle u, u \rangle_V + \langle w, w \rangle_V \\
\implies \langle u - iw, u - iw \rangle &= \langle u, u \rangle_V + \langle -w, -w \rangle_V = \langle u, u \rangle_V \langle w, w \rangle_V = 1 \\
\implies \|\overline{v_{\mathbb{C}}}\| &= 1
\end{aligned}$$

$\lambda = \gamma + i\delta$

$$\alpha_{\mathbb{C}}(v_{\mathbb{C}}) = \lambda v_{\mathbb{C}} \implies \alpha(u) + i\alpha(w) = (\gamma + i\delta)(u + iw) = (\gamma u - \delta w) + i(\delta u + \gamma w)$$

$$\begin{array}{r} \alpha(u) = \gamma u + \delta w \\ \alpha(w) = \delta u + \gamma w \end{array} \implies \begin{aligned} \alpha_{\mathbb{C}}(\overline{v_{\mathbb{C}}}) &= \alpha(u) + i\alpha(-w) = (\gamma u + \delta w) + i(\delta u - \gamma w) \\ &= (\gamma - i\delta)(u - iw) = \overline{\lambda}\overline{v_{\mathbb{C}}} \end{aligned}$$

$\implies$ $\overline{v_{\mathbb{C}}}$ ist Eigenvektor von $\alpha_{\mathbb{C}}$ zum Eigenvektor $\overline{\lambda} \overset{3.2.9}{\implies} \overline{v_{\mathbb{C}}}$ ist Eigenvektor von $\alpha_{\mathbb{C}}^*$ zum Eigenwert $\lambda$.

$$\begin{aligned} &\lambda \langle v_{\mathbb{C}}, \overline{v_{\mathbb{C}}} \rangle = \langle \alpha(v_{\mathbb{C}}), \overline{v_{\mathbb{C}}} \rangle = \langle v_{\mathbb{C}}, \alpha_{\mathbb{C}}^*(\overline{v_{\mathbb{C}}}) \rangle = \langle v_{\mathbb{C}}, \lambda \overline{v_{\mathbb{C}}} \rangle = \overline{\lambda} \langle v_{\mathbb{C}}, \overline{v_{\mathbb{C}}} \rangle \\ &\implies \underbrace{(\lambda - \overline{\lambda})}_{\neq 0, \text{ weil } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \langle v_{\mathbb{C}}, \overline{v_{\mathbb{C}}} \rangle = 0 \implies \langle v_{\mathbb{C}}, \overline{v_{\mathbb{C}}} \rangle = 0 \end{aligned}$$

□

**Satz 3.2.14:**

Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$

$$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \text{ normal} \iff \exists \text{ ONB } B = (e_1, \ldots, e_n) \text{ von } V \text{ mit}$$

$$_BM(\alpha)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_k & & & & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} \gamma_1 & -\delta_1 \\ \delta_1 & \gamma_1 \end{matrix}} & & & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} \gamma_2 & -\delta_2 \\ \delta_2 & \gamma_2 \end{matrix}} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \boxed{\begin{matrix} \gamma_r & -\delta_r \\ \delta_r & \gamma_r \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

wobei $\mathrm{spec}(\alpha_{\mathbb{C}}) = \{\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_k}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+r}}_{\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}\}$ und $\lambda_{k+j} = \gamma_j + i\delta_j$

**Bemerkung**

Jedem Kästchen $\eta(\gamma, \delta)$ entspricht ein Paar $\lambda, \overline{\lambda}$ konjugiert komplexer Eigenwerte von $\alpha_{\mathbb{C}}$. $\gamma = \mathfrak{Re}(\lambda), \delta = \Im(\lambda)$

*Beweis.*

$n = 1$: ✓

$n - 1 \to n$: Wenn $\alpha$ reellen Eigenwert besitzt, kann man wie im Beweis von Satz 3.2.10 vorgehen. Wenn nicht: Sei $v_{\mathbb{C}} \in V_{\mathbb{C}}$ ein Eigenvektor von $\alpha_{\mathbb{C}}$ zum Eigenwert $\lambda = \delta + i\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Lemma 3.2.13: $\overline{v_\mathbb{C}}$ ist Eigenvektor von $\alpha_\mathbb{C}$ zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ und
$\langle v_\mathbb{C}, \overline{v_\mathbb{C}}\rangle = 0$
Setze

$$\left.\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(v_\mathbb{C} + \overline{v_\mathbb{C}}) \in V \quad & v_\mathbb{C} = u + iw \\ b &= \tfrac{1}{i\sqrt{2}}(v_\mathbb{C} - \overline{v_\mathbb{C}}) \in V \quad & \overline{v_\mathbb{C}} = u - iw \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} v_\mathbb{C} + \overline{v_\mathbb{C}} &= 2u \\ \frac{1}{i}(v_\mathbb{C} - \overline{v_\mathbb{C}}) &= 2w \end{aligned}$$

$\boxed{\text{UE}} \implies \|a\| = \|b\| = 1$ und $\langle a, b\rangle = 0$
Weiters

$$\begin{aligned} \alpha(a) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_\mathbb{C}(v_\mathbb{C}) + \alpha_\mathbb{C}(\overline{v_\mathbb{C}})) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda v_\mathbb{C} + \overline{\lambda}\overline{v_\mathbb{C}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}((\delta + i\gamma)(u+iw) + (\delta - i\gamma)(u - iw)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}((\delta u - \gamma w) + i(\delta w + \gamma u) + (\delta u - \gamma w) - i(\delta w + \gamma u)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta 2u - \gamma 2w) = \delta\frac{2u}{\sqrt{2}} - \gamma\frac{2w}{\sqrt{2}} \\ &= \delta a - \gamma b \\ \alpha(b) &= \frac{1}{i\sqrt{2}}(\alpha_\mathbb{C}(v_\mathbb{C}) - \alpha_\mathbb{C}(\overline{v_\mathbb{C}})) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\lambda v_\mathbb{C} - \overline{\lambda}\overline{v_\mathbb{C}}) \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2}}((\delta + i\gamma)(u+iw) - (\delta - i\gamma)(u - iw)) \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2}}((\delta u - \gamma w) + i(\delta w + \gamma u) - ((\delta u - \gamma w) - i(\delta w + \gamma u))) \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2}}(2i\delta w + 2i\gamma u) = \delta\frac{2iw}{i\sqrt{2}} + \gamma\frac{2iu}{i\sqrt{2}} = \delta\frac{2w}{\sqrt{2}} + \gamma\frac{2u}{\sqrt{2}} \\ &= \delta b + \gamma a \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$: Da $B$ Orthonormalbasis ist, folgt aus Satz 3.2.4 und $\lambda_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{R}$, dass ${}_BM(\alpha^*)_B = {}_BM(\alpha)_B^* = \overline{{}_BM(\alpha)_B}^T = {}_BM(\alpha)_B{}^T$. Da ${}_BM(\alpha^*)_B$ eine Blockdiagonalmatrix ist, reicht es aus die multiplikative Kommutativität für die einzelnen Blöcke zu zeigen:

$$\lambda_i\lambda_i = \lambda_i\lambda_i \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\delta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2 + \delta^2 & 0 \\ 0 & \delta^2 + \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\delta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} \qquad \square$$

**Satz 3.2.15:**

Sei $V$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum, $\alpha \in \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(V,V)$ anti-selbstadjungiert. Dann gilt

a) $\lambda \in \mathrm{spec}(\alpha) \implies \mathfrak{Re}(\lambda) = 0$

b) $\alpha_\mathbb{C}$ besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

c) Ist $V$ euklidisch, so sind die Diagonalelemente der Matrix ${}_BM(\alpha)_B$ gleich 0, wobei $B$ die Basis aus Satz 3.2.14 ist.

*Beweis.* a) $\alpha$ ist normal $\implies$ wegen Satz 3.2.9 $v \in \mathrm{Eig}_\alpha(\lambda) \implies v \in \mathrm{Eig}_{\alpha^*}(\overline{\lambda})$ Mit $0 \neq v \in \mathrm{Eig}_\alpha(\lambda)$:

$$\alpha(v) = \lambda v = -\alpha^*(v) = -\overline{\lambda} v \implies \lambda = -\overline{\lambda} \implies \mathfrak{Re}(\lambda) = 0$$

b) $\alpha$ ist normal, $\alpha^* = -\alpha$

c) Folgt aus dem Satz 3.2.14, sowie a). □

## 3.3 Orthogonale und unitäre Abbildungen

**Definition 3.3.1:**

Seien $V, W$ beide euklidische/unitäre Vektorräume, $\alpha \in \mathrm{Hom}(V, W)$ heißt orthogonal/unitär wenn

$$\forall v, w \in V\colon\ \langle \alpha(v), \alpha(w) \rangle_W = \langle v, w \rangle_V$$

**Bemerkung**

Das sind genau die Längen- und Winkelerhaltenden Abbildungen.

**Satz 3.3.2:**

Seien $V, W$ euklidische/unitäre Vektorräume und $\alpha \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann sind äquivalent:

a) $\alpha$ ist orthogonal/unitär

b) $\forall v \in V\colon\ \|v\|_V = 1 \implies \|\alpha(v)\|_W = 1$

c) $\forall v \in V\colon\ \|v\|_V = \|\alpha(v)\|_W$

d) $(e_1, \dots, e_n) \subseteq V$ ONS $\implies (\alpha(e_1), \dots, \alpha(e_n)) \subseteq W$ ONS.

*Beweis.*

a) $\implies$ b): ✓

b) $\implies$ c): Es gilt für $v \in V \setminus \{0\}$: $\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1 \implies \left\| \frac{\alpha(v)}{\|v\|} \right\| = 1$
$\implies \|\alpha(v)\| = \|v\|$

c) $\implies$ d): $\langle v,w\rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\|v+iw\|^2 - i\|v-iw\|^2)$

d) $\implies$ a): Sei $v,w \in V$.

1. Fall: $v = 0 \implies \langle \alpha(v), \alpha(w)\rangle = \langle 0, \alpha(w)\rangle = 0$✓
2. Fall: $w = \lambda v \implies \langle \alpha(w), \alpha(v)\rangle = \lambda \langle \alpha(v), \alpha(v)\rangle = \lambda \|\alpha(v)\|^2$.
   Sei $l := \frac{v}{\|v\|} \overset{\text{d)}}{\implies} \alpha(l)$ ist ONS $\implies \|\alpha(l)\| = 1 \implies \|\alpha(v)\| = \|v\|$.
   Es folgt $\langle \alpha(v), \alpha(w)\rangle = \langle v,w\rangle$ ✓.
3. Fall: $v,w$ linear unabhängig. Sei $(e_1,e_2)$ ONS mit $\langle \{e_1,e_2\}\rangle = \langle \{v,w\}\rangle$. (Gram-Schmidt liefert Existenz)

$$\begin{aligned}
&\implies (\alpha(e_1), \alpha(e_2)) \text{ ist ONS}\\
&\phantom{\implies} v = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2\\
&\phantom{\implies} w = \tau_1 e_1 + \tau_2 e_2\\
&\implies \alpha(v) = \mu_1\alpha(e_1) + \mu_2\alpha(e_2)\\
&\phantom{\implies} \alpha(w) = \tau_1\alpha(e_1) + \tau_2\alpha(e_2)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\underset{3.1.15}{\implies} \langle v,w\rangle = \mu_1\overline{\tau_1} + \mu_2\overline{\tau_2} \underset{(\alpha(e_1),\alpha(e_2)) \text{ ONS } \& \ 3.3}{=} \langle \alpha(v), \alpha(w)\rangle$$

Beweis für $\langle v,w\rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\|v+iw\|^2 - i\|v-iw\|^2)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\|v+iw\|^2 - i\|v-iw\|^2)\\
&= \frac{1}{4}(\langle v+w, v+w\rangle - \langle v-w, v-w\rangle) + \frac{i}{4}(\langle v+iw, v+iw\rangle\\
&\qquad - \langle v-iw, v-iw\rangle)\\
&= \frac{1}{4}(\cancel{\langle v,v\rangle} + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \cancel{\langle w,w\rangle} - \cancel{\langle v,v\rangle} + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle - \cancel{\langle w,w\rangle})\\
&\qquad + \frac{i}{4}(\cancel{\langle v,v\rangle} + \langle v,iw\rangle + \langle iw,v\rangle + \cancel{\langle iw,iw\rangle}\\
&\qquad - \cancel{\langle v,v\rangle} - \langle v,-iw\rangle - \langle -iw,v\rangle - \cancel{\langle -iw,-iw\rangle})\\
&= \frac{1}{4}(2\langle v,w\rangle + 2\langle w,v\rangle) + \frac{i}{4}(-i\langle v,w\rangle + i\langle w,v\rangle - i\langle v,w\rangle + i\langle w,v\rangle)\\
&= \frac{1}{4}(2\langle v,w\rangle + 2\langle w,v\rangle) + \frac{1}{4}(\langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle + \langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle)\\
&= \frac{1}{4}(2\langle v,w\rangle + 2\langle w,v\rangle + 2\langle v,w\rangle - 2\langle w,v\rangle)\\
&= \frac{1}{4}4\langle v,w\rangle = \langle v,w\rangle
\end{aligned}$$

□

**Korollar 3.3.3:**

a) $\alpha$ orthogonal $\implies$ $\alpha_{\mathbb{C}}$ unitär

b) $\alpha$ orthogonal/unitär $\implies$ $\alpha$ injektiv.

*Beweis.* a) Folgt direkt aus Satz 3.3.2:

$$\underset{u+iv}{\underset{\|}{\|v_{\mathbb{C}}\|}} = 1 \iff \|u\|^2 + \|v\|^2 = 1$$
$$\implies \|\alpha_{\mathbb{C}}(v_{\mathbb{C}})\| = \|\alpha(u)\|^2 + \|\alpha(v)\|^2 = 1$$

b) $\alpha(v) = 0 \implies \|\alpha(v)\| = 0 \implies \|v\| = 0 \implies v = 0$ $\square$

**Definition 3.3.4:**

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt <u>orthogonal</u> wenn $A^{-1} = A^T$.
- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt <u>unitär</u> wenn $A^{-1} = A^* = \overline{A}^T$.
- $O(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon \det(A) \neq 0 \wedge A^{-1} = A^T\}$
- $U(n,\mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \colon \det(A) \neq 0 \wedge A^{-1} = A^*\}$

**Beispiele**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ orthogonal}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \text{ unitär}$$

**Satz 3.3.5:**
Es sind äquivalent für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, \mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$:

a) $A$ ist orthogonal/unitär.

b) $(a_{1\_}, a_{2\_}, \dots, a_{n\_})$ bilden ONS in $\mathbb{K}^n$.

c) $(a_{\_1}, a_{\_2}, \dots, a_{\_n})$ bilden ONS in $\mathbb{K}^n$.

*Beweis.*

a) $\iff$ b): heißt, dass $\langle a_{i\_}, a_{j\_}\rangle_{\mathbb{K}^n} = \delta_{ij}$.
Gleichzeitig gilt $(\langle a_{i\_}, a_{j\_}\rangle_{\mathbb{K}^n})_{i,j=1,\dots,n} = AA^*$
Also ist b) gleichbedeutend mit $AA^* = I$, also $A^{-1} = A^*$.

a) $\iff$ c): genauso, nur mit $A^*A$ $\square$

**Satz 3.3.6:**

Sei $V$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$ und $\alpha \in \mathrm{Hom}(V,V)$. Dann gilt

$$\alpha \text{ ist orthogonal/unitär} \iff \alpha^{-1} = \alpha^*$$

*Beweis.* $\implies$ : Seien $v, w \in V$. $\alpha^{-1}$ existiert wegen Korollar 3.3.3b)

$$\begin{aligned}\left\langle v, \alpha^*(w) - \alpha^{-1}(w)\right\rangle &= \langle v, \alpha^*(w)\rangle - \left\langle v, \alpha^{-1}(w)\right\rangle \\ &= \langle \alpha(v), w\rangle - \left\langle v, \alpha^{-1}(w)\right\rangle \\ &= \langle \alpha(v), w\rangle - \left\langle \alpha(v), \alpha(\alpha^{-1}(w))\right\rangle \\ &= \langle \alpha(v), w\rangle - \langle \alpha(v), w\rangle = 0\end{aligned}$$

$\impliedby$ : Sei $\alpha^* = \alpha^{-1}, u, v, w \in V, v = \alpha(w)$

$$\implies \langle u, w\rangle = \left\langle u, \alpha^{-1}(v)\right\rangle = \langle u, \alpha^*(v)\rangle = \langle \alpha(u), v\rangle = \langle \alpha(u), \alpha(w)\rangle \checkmark$$

□

**Satz 3.3.7:**

Sei $B$ Orthonormalbasis, $\alpha \in \mathrm{Hom}(V,V)$, $A = {}_BM(\alpha)_B$. Dann gilt:

a) $\alpha$ orthogonal $\iff$ $A$ orthogonal.

b) $\alpha$ unitär $\iff$ $A$ unitär.

*Beweis.* Satz 3.2.4: ${}_BM(\alpha^*)_B = A^*$
${}_BM(\alpha^{-1})_B = A^{-1}$

□

**Satz 3.3.8:**

a) $O(n,\mathbb{R})$ ist Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

b) $U(n,\mathbb{C})$ ist Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

c) $A \in O(n,\mathbb{R}) \implies \det(A) \in \{1, -1\}$.

d) $A \in U(n,\mathbb{C}) \implies |\det(A)| = 1 \implies \det(A) = e^{i\alpha}, \alpha \in [0, 2\pi]$.

*Beweis.* a) $I \in O(n,\mathbb{R}), A, B \in O(n,\mathbb{R})$
$(AB)^* = B^*A^* = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} \implies AB \in (n,\mathbb{R})$
$\left(A^{-1}\right)^* = \left(A^*\right)^* = A \implies A^{-1} \in O(n,\mathbb{R})$

b) Genauso

c) $A^{-1} = A^T$.

$$\begin{aligned} 1 &= \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)\det(A) \\ &= \det(A)^2 \implies \det(A) \in \{-1, 1\} \end{aligned}$$

d) $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)} \implies \det(A^*) = \overline{\det(A)}$.

$$\begin{aligned} 1 &= \det(A)\det(A^{-1}) = \det(A)\det(A^*) = \det(A)\overline{\det(A)} \\ &\implies |\det(A)| = 1 \end{aligned}$$

□

**Polarzerlegung**

$$z = \overbrace{e^{i\varphi}}^{\text{Betrag } 1} \underbrace{|z|}_{\text{positiv reell}}$$

Betrag 1 $\cong$ unitär, positiv $\cong$ selbstadjungiert mit positiven Eigenwerten.

**Satz 3.3.9 (Polarzerlegung):**
Sei $V$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum, $\dim(V) < \infty$ und sei $\alpha \in \mathrm{Hom}(V, V)$. Dann existiert eine orthogonale/unitäre Abbildung $\beta$ und eine selbstadjungierte Abbildung $\gamma$ mit lauter nichtnegativen reellen Eigenwerten, sodass $\alpha = \beta \circ \gamma$. Falls $\alpha$ Automorphismus ist, so sind alle Eigenwerte von $\gamma$ positiv, und $\gamma, \beta$ eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Zunächst: $\alpha$ Automorphismus.

- $\alpha^*$ ist auch Automorphismus.

$$\begin{aligned} \text{Sei } \alpha^*(v) = 0 &\implies \forall w \in V\colon\ \langle w, \alpha^*(v)\rangle = 0 \\ &\implies \forall w \in V\colon\ \langle \alpha(V), v\rangle = 0 \\ &\implies v \in \underbrace{\mathrm{im}(\alpha)}_{v}{}^{\perp} = \{0\} \\ &\implies v = 0 \end{aligned}$$

- $\alpha^* \circ \alpha$ ist Automorphismus und selbstadjungiert.

$$(\alpha^*\alpha)^* = \alpha^*(\alpha^*)^* = \alpha^*\alpha$$

- Satz 3.2.11 ist $\mathrm{spec}(\alpha^*\alpha) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\exists$ ONB $(e_1, \ldots, e_n)$ von V aus Eigenvektoren, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Eigenwerte. Behauptung: $\lambda_i > 0 \forall i \in [n]$

$$\lambda_i = \lambda_i \langle e_i, e_i\rangle = \langle \lambda_i e_i, e_i\rangle = \langle \alpha^*\alpha(e_i), e_i\rangle = \langle \alpha(e_i), \alpha(e_i)\rangle > 0$$

- $\gamma\colon \begin{cases} v & \to V \\ v = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i & \mapsto \sum_{i=1}^n \mu_i \sqrt{\lambda_i} e_i \end{cases}$ ${}_BM(\alpha^*\alpha)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ${}_BM(\gamma)_B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \implies \gamma$ selbstadjungiert
  $\implies \gamma^2 = \alpha^*\alpha$

- $\alpha = \beta \circ \gamma \implies \beta = \alpha \circ \gamma^{-1}$ Behauptung: $\beta$ unitär, das heißt $\beta^{-1} = \beta^*$

$$\begin{aligned} \beta^{-1} &= \left(\alpha\gamma^{-1}\right)^{-1} = \gamma\alpha^{-1} = \gamma^{-1}\gamma^2\alpha^{-1} = \gamma^{-1}\alpha^*\alpha\alpha^{-1} = \gamma^{-1}\alpha^* \\ &= \left(\alpha(\gamma^{-1})^*\right)^* = \left(\alpha\gamma^{-1}\right)^* = \beta^* \end{aligned}$$

  $\implies \beta$ unitär.

<u>Eindeutigkeit:</u> $\alpha = \beta' \circ \gamma'$

$$\gamma^2 = \alpha^*\alpha = (\gamma')^* \underbrace{\beta'^*\beta'}_{\text{id}} \gamma' = (\gamma')^*\gamma' = (\gamma')^2$$

$\implies \gamma, \gamma'$ haben dieselben Eigenwerte und Eigenvektoren.
$\implies \gamma = \gamma' \implies \beta = \beta'$
<u>$\alpha$ nicht injektiv:</u>

- $W := \ker(\alpha)^\perp \implies \alpha|_W$ ist injektiv.
  Sei $v, w \in W, \alpha(v) = \alpha(w) \implies \alpha(v-w) = 0 \implies v - w \in \ker(\alpha) = W^\perp \cap W = \{0\} \implies v = w \implies \alpha|_W = \beta_W \circ \gamma_W$ mit $\beta, \gamma \in \operatorname{Hom}(W,W); \beta_W$ unitär, $\gamma_W$ selbstadjungiert mit positiven Eigenwerten.

- Sei $(e_1, \dots, e_k)$ ONB von $W$, $(e_1, \dots, e_k, \dots, e_n)$ ONB von $V$.

- $\pi\colon \begin{cases} V & \to W \\ v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i & \to \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \end{cases}$ orthogonale Projektion auf $W$.
  $\pi$ ist selbstadjungiert:

$$\langle \pi(v), w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overline{\mu_i}$$
$$\langle v, \pi(w) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^k \mu_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overline{\mu_i}$$

  $\gamma := \pi^* \circ \gamma_W \circ \pi = \pi \circ \gamma_W \circ \pi$

$$\begin{aligned} &v \in W && \implies \gamma(v) = \gamma_W(v) \\ &v \in W^\perp = \ker(\alpha) && \implies \gamma(v) = 0 \end{aligned}$$

  $\beta := \underset{W}{\beta_W} \oplus \underset{W^\perp}{I}$ ist orthogonal/unitär.
  $\implies \alpha = \beta \circ \gamma$ $\square$

**Definition 3.3.10:**
$\alpha \in \operatorname{Hom}(V,V)$ heißt $\dfrac{\underline{\text{positiv definit}}}{\underline{\text{positiv semi-definit}}}$, wenn $\forall v \in V \setminus \{0\}\colon \langle \alpha(v), v\rangle \genfrac{}{}{0pt}{}{>}{\geq} 0$

**Lemma 3.3.11:**
Sei $\alpha$ selbstadjungiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha \text{ positiv definit } &\iff \text{Alle Eigenwerte positiv} \\ \alpha \text{ positiv semi-definit } &\iff \text{Alle Eigenwerte nicht-negativ} \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ ONB aus Eigenvektoren, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \lambda_i \in \mathbb{R}$ Eigenwerte, $v = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$

$$\langle \alpha(v), v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i \overline{\mu_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{|\mu_i|}_{\geq 0}{}^2$$

Angenommen $\exists i \in [n]\colon \lambda_j \leq 0 \implies \langle \alpha(\lambda_j), e_j\rangle = \lambda_j \leq 0 \implies \alpha$ nicht positiv definit.
Angenommen $\forall i \in [n]\colon \lambda_i > 0 \implies \langle \alpha(v), v\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\mu_i|^2 > 0$. $\square$

**Bemerkung**

In der Polarzerlegung ist $\beta$ orthogonal/unitär und $\gamma$ selbstadjungiert & positiv (semi-)definit.

## 3.4 Hauptachsentheorem für symmetrische/hermitesche Matrizen

**Ziel**

Klassifizierung aller Skalarprodukte.

**Definition 3.4.1:**

| | | |
|---|---|---|
| $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt | <u>symmetrisch</u>, wenn | $A = A^T$ |
| $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt | <u>hermitesch</u>, wenn | $A = A^*$ |
| $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt | <u>schiefsymmetrisch</u>, wenn | $A = -A^T$ |
| $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt | <u>schiefhermitesch</u>, wenn | $A = -A^*$ |

**Satz 3.4.2:**
$V$ euklidischer/unitärer Vektorraum, $\dim(V) < \infty$. Dann gilt:

- $\alpha$ selbstadjungiert $\iff \exists$ ONB $B$ mit ${}_BM(\alpha)_B$ symmetrisch/hermitesch.
- $\alpha$ anti-selbstadjungiert $\iff \exists$ ONB $B$ mit ${}_BM(\alpha)_B$ schiefsymmetrisch/schiefhermitesch.

**Satz 3.4.3:**
$A$ symmetrisch/hermitesch.
$\implies \exists$ orthogonale/unitäre Matrix $P$ mit $D = P^{-1}AP$ reelle Diagonalmatrix

*Beweis.* Sei $E = \{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq \mathbb{K}^n$ kanonische Basis,
$\varphi_A\colon \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to \mathbb{K}^n \\ v & \mapsto Av \end{cases} \implies {}_EM(\varphi_A)_E = A \implies {}_EM(\varphi_A^*)_E = A^* = A$
$\implies \varphi_A$ selbstadjungiert. $\implies \exists$ ONB $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von $\varphi_A$, Eigenwerte sind reell. $\implies {}_BM(\varphi_A)_B = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
$\implies {}_BM(\varphi_A)_B = \underbrace{{}_BM(\mathrm{id})_E}_{P^{-1}}\,\underbrace{{}_EM(\varphi_A)_E}_{A}\,\underbrace{\underbrace{{}_EM(\mathrm{id})_B}_{(b_1,\ldots,b_n)}}_{P} \implies D = P^{-1}AP$ ☐

**Korollar 3.4.4:**
$A$ symmetrisch/hermitesch $\implies$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

### Berechnung der Hauptachsentransformation

$A \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$

1) $\chi_A(\lambda) = \prod_{j=1}^r (\lambda_j - \lambda)^{d_j}$ ($\sum d_j = n$; algebraische Vielfachheit = geometrische Vielfachheit)
2) Für jedes $j \in [r]$: Berechne Basis $B_j = (b_1^j, \ldots, b_{d_j}^j)$ von $\ker(A - \lambda_j I)$
3) Orthogonalisiere $B_j$ zu ONS $E_j = (e_1^j, \ldots, e_{d_j}^j)$ mittels Gram-Schmidt Verfahren.
4) $B = \bigcup_{j=1}^r E_j$ ist die gesuchte Orthonormalbasis.

   Insbesondere $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

   $B^{-1} = \overline{B}^T$

Polarzerlegung $A \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$, $A^*A$ symmetrisch/hermitesch

$$\implies A^*A = P^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P$$

$$(A^*A)^{\frac{1}{2}} = P^* \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \underbrace{P = S}_{O=AS^{-1}} \implies A = \underset{\substack{| \\ \text{orthogonal/unitär}}}{O}S$$

**Satz 3.4.5:**

Sei $V$ ein reeller/komplexer Vektorraum mit $\dim(V) = n, B = (b_1, \ldots, b_n)$ Basis. Für $A \in K^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ ist

$$\langle v, w \rangle := {}_B\Phi(v)^T A_B\overline{\Phi(w)} \tag{3.4}$$

Genau dann ein Skalarprodukt, wenn $A$ symmetrisch/hermitesch und $\underbrace{\text{positiv definit}}_{\forall \lambda \in \operatorname{spec}(A):\, \lambda > 0}$ ist.

$$\Updownarrow$$

$\forall v \in V \setminus \{0\} \colon \langle Av, v \rangle > 0$

Umgekehrt: Sei $\langle ., . \rangle$ Skalarprodukt und $B$ Basis

$$\implies \langle v, w \rangle = {}_B\Phi(v)^T \underbrace{(\langle b_i, b_j \rangle)_{i,j=1}^n}_{A} {}_B\overline{\Phi(w)}$$

$\left(A = P^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P \implies \langle v, w \rangle = {}_B\Phi(v)^T P^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P_B\overline{\Phi(w)} \implies\right.$ in geeigneter Basis ist jedes Skalarprodukt durch $\sum_{i=1}^n \mu_i \overline{\lambda_i}$ gegeben.)

*Beweis.* Nur für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Angenommen 3.4 ist Skalarprodukt.

$$\begin{aligned} \implies \langle b_i, b_j \rangle &= {}_B\Phi(b_i)^T A_B\overline{\Phi(b_j)} = e_i^T A e_j = a_{ij} \\ &\,\| \\ \overline{\langle b_j, b_i \rangle} &= \overline{a_{ji}} \\ \implies a_{ij} &= \overline{a_{ji}} \implies A \text{ hermitesch} \end{aligned}$$

Weiters muss $A$ positiv definit sein: Angenommen $\exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \colon x^T A x = 0 \implies v := \sum x_i b_i$, das heißt ${}_B\Phi(v) = x$ erfüllt $\langle v, v \rangle = {}_B\Phi(v)^T A_B\overline{\Phi(v)} = x^T A \overline{x} = 0$
Sei $A$ hermitesch & positiv definit. Klarerweise gilt dann für
$\langle u, v \rangle := {}_B\Phi(u)^T A_B\overline{\Phi(v)}$:

$$\begin{aligned} \langle u + v, w \rangle &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \\ \langle u, v \rangle &= \overline{\langle v, u \rangle} \\ \langle \lambda u, v \rangle &= \lambda \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, dass $\forall v \in V \setminus \{0\}\colon \langle v, v\rangle > 0$
Satz 3.4.3 $\implies$ $\exists$ unitäre Matrix $U$ mit $A = \underset{U^{-1}}{\overset{\Vert}{U^*}} \underbrace{\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}_{\Sigma} U, \lambda_i \in (0, \infty) \forall i \in [n]$

$$\langle v, v\rangle = {}_B\Phi(v)^T A {}_B\overline{\Phi(v)} = {}_B\Phi(v)^T U^* \Sigma U_B \overline{\Phi(v)} = \underset{\sum \lambda_i |x_i|^2 > 0}{\overset{\Vert}{(\overline{U}_B \Phi(v))^T \Sigma \overline{\overline{U}_B(v)}}}$$

$$v \neq 0 \implies \overline{U}_B \Phi(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$$ □

**Definition 3.4.6:**
Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine symmetrische/hermitesche Matrix.

- $$t(A) := |\{\lambda \in \operatorname{spec}(A)\colon \lambda > 0\}|$$
  heißt Trägheitsindex von $A$.
- $A, B$ heißen kongruent wenn eine invertierbare Matrix $Q \in \mathbb{K}^{n \times n}$ existiert mit $B = Q^* A Q$

**Bemerkung**

$M_B(\sigma), M_{B'}(\sigma)$ sind kongruent (& umgekehrt)

**Satz 3.4.7 (Trägheitssatz von Sylvester):**
Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ symmetrisch/hermitesch mit $\operatorname{rg}(A) = r, t(A) = t$. Dann gilt:

a) Es gibt $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar mit
$$S^* A S = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{t}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{r-t}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r})$$
$A$ ist zu dieser Matrix kongruent.

b) $A, B$ kongruent $\iff t(A) = t(B) \wedge \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$

**Bemerkung**

Trägheitsindex und Rang charakterisieren symmetrische Bilinearformen / hermitesche Sesquilinearformen komplett.

*Beweis.* Nur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

a) Satz 3.4.3 $\implies$ $\exists P$ unitär mit $P^*AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ o.B.d.A. $\lambda_1, \dots, \lambda_t > 0, \lambda_{t+1}, \dots, \lambda_r < 0, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n = 0$.

Setze $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}} &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && \frac{1}{\sqrt{|\lambda_r|}} &&& \\ &&& 1 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 1 \end{pmatrix} \implies S := PT$ ist invertierbar.

$$S^*AS = T \underbrace{P^*AP}_{\operatorname{diag}\lambda_1,\dots,\lambda_n} T = T \begin{pmatrix} \lambda_1 && \\ & \ddots & \\ && \lambda_n \end{pmatrix} T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

b) $A, B$ kongruent, das heißt $\exists Q$ invertierbar mit $B = Q^*AQ$
$\implies \operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(A)$. Satz 3.4.3 $\implies$ $\exists P_1, P_2$ unitär mit

$$P_1^*AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 && \\ & \ddots & \\ && \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

$$P_2^*AP_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 && \\ & \ddots & \\ && \mu_n \end{pmatrix} = G$$

$t(A) := t, t(B) := s$

Ordne so, dass $\begin{matrix} \lambda_1, \dots, \lambda_t > 0, \lambda_{t+1}, \dots, \lambda_r < 0, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n = 0 \\ \mu_1, \dots, \mu_s > 0, \mu_{s+1}, \dots, \mu_r < 0, \mu_{r+1}, \dots, \mu_n = 0 \end{matrix}$

Setze $a_i := \sqrt{|\lambda_i|}, b_i := \sqrt{|\mu_i|}$

$$x^*Dx = \sum_{j=1}^{t} a_j^2 |x_j|^2 - \sum_{j=t+1}^{r} a_j^2 |x_j|^2 \tag{3.5}$$

$C := P_2 Q^{-1} P_1, y := Cx$

$$x^*Dx = x^*C^*GCx = y^*Gy = \sum_{j=1}^{s} b_j^2 |y_j|^2 - \sum_{j=s+1}^{r} b_j^2 |y_j|^2 \tag{3.6}$$

Angenommen $t < s$:

$$\left.\begin{array}{ll} x_i = 0 & i = 1, \dots, t \\ y_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} x_j = 0 & i = s+1, \dots, n \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

$\implies < n$ Gleichungen in $n$ Variablen $\implies \exists z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\colon$ 3.7 ist für $z$ erfüllt.

$$z^* D z \stackrel{3.5}{=} - \sum_{j=t+1}^{r} a_j^2 \left|z_j\right|^2 < 0$$

$$z^* D z \stackrel{3.6}{=} \sum_{j=1}^{s} b_j^2 \left|y_j\right|^2 > 0 \qquad ↯$$

$\implies s = t$ $\square$

**Berechnung des Trägheitsindex:**

Sei $A$ symmetrisch hermitesch, $\det(A) \neq 0 \implies \chi_A(\lambda) = a_1 \lambda^n + \cdots + \underset{\neq 0}{a_0}$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ ist Polynom mit lauter reellen Nullstellen.

**Satz 3.4.8 (Vorzeichenregel von Descartes):**

Sei $p$ Polynom mit $p(0) \neq 0$, reellen Koeffizienten und lauter reellen Nullstellen. Dann gilt

$$\left|\{\lambda\colon p(\lambda) = 0 \wedge \lambda > 0\}\right| = \left|i \in \{0, \dots n-1\}\colon a_i a_{i+1} < 0\right|$$

## 3.5 Bilinearformen und Sesquilinearformen

**Definition 3.5.1:**

- $\sigma\colon V \times V \to \mathbb{K}$ mit $\forall u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \sigma(v+w, u) &= \sigma(v, u) + \sigma(w, u) \\ \sigma(v, w+u) &= \sigma(v, w) + \sigma(v, u) \\ \sigma(\lambda v, w) &= \lambda \sigma(v, w) \\ \sigma(v, \lambda w) &= \lambda \sigma(v, w) \end{aligned} \tag{3.8}$$

  heißt <u>Bilinearform</u>.

- Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und anstelle von 3.8 gilt, dass $\sigma(v, \lambda w) = \overline{\lambda} \sigma(v, w)$, so heißt $\sigma$ <u>Sesquilinearform</u>.

- Eine Bilinearform heißt symmetrisch, wenn $\sigma(u,v) = \sigma(v,u)$ und alternierend, wenn $\sigma(u,v) = -\sigma(v,u)$.
- Eine Sesquilinearform heißt hermitesch, wenn $\sigma(u,v) = \overline{\sigma(v,u)}$

**Beispiel**

- Euklidisches Skalarprodukt ist symmetrische Bilinearform.
- Unitäres Skalarprodukt ist hermitesche Bilinearform.
- $$\sigma(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 5x_2y_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$
  $V = \mathbb{R}^2$ $q(x) := \sigma(x,x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 - 5x_2^2, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ Basis, so ist $M_B(\sigma) := (\sigma(b_i, b_j))_{i,j=1}^n$

**Lemma 3.5.2:**

a) Es gilt für $\sigma$ Bilinearform und $B$ Basis, dass
$$\sigma(u,v) = {}_B\Phi(u)^T M_B(\sigma) {}_B\Phi(v) \ \forall u, v$$

b) Es gilt für $\sigma$ Sequilinearform, dass
$$\sigma(u,v) = {}_B\Phi(u)^T M_B(\sigma) {}_B\overline{\Phi(v)} \ \forall u, v$$

c) Sei $B'$ eine weitere Basis und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$$M_{B'}(\sigma) = {}_BM(\mathrm{id})_{B'}{}^T \, M_B(\sigma) \, {}_BM(\mathrm{id})_{B'}$$

d) Sei $B'$ eine weitere Basis und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
$$M_{B'}(\sigma) = {}_BM(\mathrm{id})_{B'}{}^T \, M_B(\sigma) \, {}_B\overline{M(\mathrm{id})}_{B'}$$

e) $\sigma$ symmetrisch/hermitesch $\iff$ $M_B(\sigma)^* = M_B(\sigma)$

*Beweis.* a) Analog wie b)

b) $u = \sum \lambda_i b_i, v = \sum \mu_j b_j, A = M_B(\sigma)$
$$\sigma(u,v) = \sigma\left(\sum \lambda_i b_i, \sum \mu_j b_j\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\sum_{j=1}^n \underbrace{\sigma(b_i, b_j)}_{a_{ij}} \overline{\mu}_j}_{A_B\overline{\Phi(v)}}$$
$$= {}_B\Phi(u)^T M_B(\sigma) {}_B\overline{\Phi(v)}$$

c) Analog wie d)

d) $b'_i = \sum_k a_{ki} b_k$, $M_{B'} = (\sigma(b'_i, b'_j))_{i,j}$

$$\begin{aligned}\sigma(b'_i, b'_j) &= \sigma\left(\sum_k a_{ki} b_k, \sum_l a_{lj} b_l\right) = \sum_k a_{ki} \sum_l \underbrace{\sigma(b_i, b_j)}_{M_B(\sigma)} \overline{a_{lj}} \\ &= \left(A^T M_B(\sigma) \overline{A}\right)_{ij}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \sigma(v, w) &= \overline{\sigma(w, v)} \\ /\!/ \quad & \quad \backslash\!\backslash \\ {}_B\Phi(v)^T M_B(\sigma) {}_B\overline{\Phi(w)} &= \left({}_B\overline{\Phi(w)}^T \overline{M_B(\sigma)} {}_B\Phi(v)\right)^T \\ &= {}_B\Phi(v)^T \overline{M_B(\sigma)}^T {}_B\overline{\Phi(w)} \\ \implies M_B(\sigma) = M_B(\sigma)^* & \end{aligned}$$

□

**Satz 3.5.3:**

Sei $V$ euklidischer/unitärer Vektorraum und $\sigma$ symmetrische/hermitesche Bilinear-/Sesquilinearform. Dann existiert eine Orthonormalbasis $B$ mit $M_B(\sigma)$ reelle Diagonalmatrix.

*Beweis.* Nach Lemma 3.5.2 e) gilt $M_B(\sigma)^* = M_B(\sigma)$ und daher nach Satz 3.4.3 gibt es orthogonale/unitäre Matrix $U$ mit

$$U^* M_B(\sigma) U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i \in \mathbb{R} \forall i \in [n]$$

Behauptung folgt dann aus Lemma 3.5.2 d). □

**Beispiel**

$\sigma$ wie in 3.9, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

$\chi_a(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -5-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(5 + \lambda) - 1$

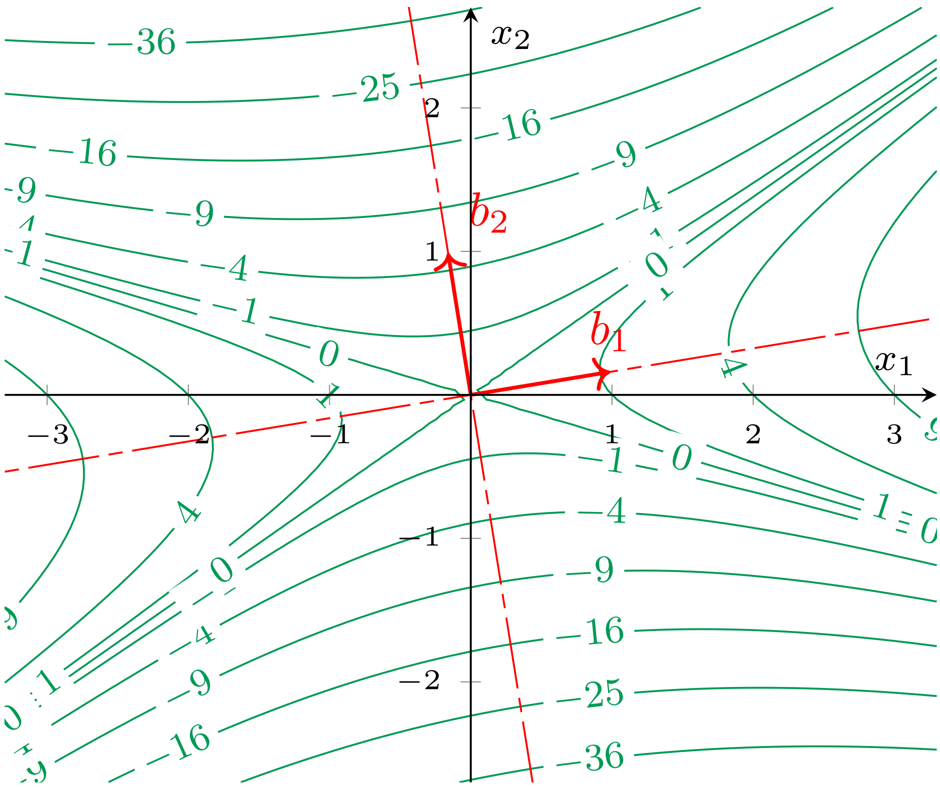
Nullstellen: $\lambda_1, \lambda_2 = -2 \pm \sqrt{10}$

$b_1 = \frac{1}{\sqrt{20+6\sqrt{10}}} \begin{pmatrix} 3+\sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \frac{1}{\sqrt{20-6\sqrt{10}}} \begin{pmatrix} 3-\sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix}$

$M_B(\sigma) = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{10} & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{10} \end{pmatrix}$

$\implies q(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 \equiv c$

Niveaulinien von $q(x)$




**Definition 3.5.4:**

Sei $\rho\colon V \to \mathbb{K}$ heißt quadratische Form wenn $\forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$:

a) $\rho(\lambda v) = \lambda^2 \rho(v)$

b) $\sigma(u, v) := \rho(u + v) - \rho(u) - \rho(v)$ ist eine (symmetrische) Bilinearform

**Lemma 3.5.5:**

Sei $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Dann entsprechen die quadratischen Formen und symmetrischen Bilinearformen einander eineindeutig.

*Beweis.* $\rho$ quadratische Form $\implies$ $\sigma(v, w) = \rho(u + v) - \rho(u) - \rho(v)$ ist symmetrische Bilinearform.

Sei umgekehrt $\sigma$ symmetrische Bilinearform, $\rho(v) := \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{char}(\mathbb{K})\neq 2}}{\tfrac{1}{2}}\sigma(v,v)$.

$$\begin{aligned}
\rho(\lambda v) &= \frac{1}{2}\sigma(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \frac{1}{2}\sigma(v,v) = \lambda^2 \rho(v) \implies \text{a)} \\
\rho(u+v) - \rho(u) - \rho(v) &= \frac{1}{2}(\sigma(u+v, u+v) - \sigma(u,u) - \sigma(v,v)) \\
&= \frac{1}{2}(\cancel{\sigma(u,u)} + \sigma(u,v) + \sigma(v,u) + \cancel{\sigma(v,v)} \\
&\qquad - \cancel{\sigma(u,u)} - \cancel{\sigma(v,v)}) \\
&= \sigma(u,v) \text{ ist symmetrische Bilinearform.}
\end{aligned}$$

$\square$

**Definition 3.5.6:**

Sei $V$ $\mathbb{C}$-VR. $\rho\colon V \to \mathbb{R}$ heißt <u>hermitesche Form</u> wenn $\forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$:

a) $\rho(\lambda v) = |\lambda|^2 \rho(v)$

b) $\rho(u+v) + \rho(u-v) = 2(\rho(u) + \rho(v))$

c) $\sigma(u,v) := \frac{1}{2}(\rho(u+v) + i\rho(u+iv) - (1+i)(\rho(u) + \rho(v)))$ ist hermitesche Sesquilinearform.

**Lemma 3.5.7:**

Hermitesche Formen und hermitesche Sesquilinearformen entsprechen einander ein-eindeutig

*Beweis.* Für hermitesche Form ist durch Definition 3.5.6 c) eine hermitesche Sesquilinearform definiert.
Sei umgekehrt $\sigma$ hermitesche Sesquilinearform. Dann ist $\rho(v) := \frac{1}{2}\sigma(v,v)$ hermitesche Form:

a) ✓

b)

$$\begin{aligned}
\rho(u+v) + \rho(u-v) &= \sigma(u+v, u+v) + \sigma(u-v, u-v) \\
&= \sigma(u,u) + \sigma(v,v) + \sigma(u,v) + \sigma(v,u) + \sigma(u,u) \\
&\qquad + \sigma(v,v) - \sigma(u,v) - \sigma(v,u) \\
&= 2\sigma(u,u) + 2\sigma(v,v) \\
&= 2(\rho(u) + \rho(v))
\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\rho(u+v) + i\rho(u+iv) - (1+i)(\rho(u)+\rho(v))) = \\
&= \sigma(u+v,u+v) + i\sigma(u+iv,u+iv) \\
&\quad - \sigma(u,u) - \sigma(v,v) - i\sigma(u,u) - i\sigma(v,v) \\
&= \sigma(u,v) + \sigma(v,u) + i\sigma(iv,u) + i\sigma(u,iv) \\
&= \sigma(u,v) + \overline{\sigma(u,v)} + i\overline{\sigma(u,iv)} + \sigma(u,v) \\
&= \sigma(u,v) + \overline{\sigma(u,v)} + i\cdot\overline{\overline{i}}\cdot\overline{\sigma(u,v)} + \sigma(u,v) \\
&= 2\sigma(u,v) \qquad \square
\end{aligned}
$$

**Bemerkung**

$\sigma$ heißt Polarform von $\rho$

## 3.6 Die Singulärwertzerlegung und die Pseudoinverse

Wir wollen nun für zwei euklidische Vektorräume $V, W$ eine geeignete Normalform bezüglich Orthonormalbasen herleiten. Polarzerlegung besagt für $\alpha \in \mathrm{Hom}(V,V)$, dass Orthonormalbasen $B, B'$ von $V$ existieren mit

$$
{}_BM(\alpha)_B = \begin{pmatrix} s_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & s_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, s_1, \dots, s_n > 0
$$

Das heißt $\alpha$ lässt sich aus orthogonalen Endomorphismen und Skalierung zusammensetzen.

**Satz 3.6.1 (Singulärwertzerlegung):**
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}/\mathbb{C}^{m\times n}$. Dann gibt es orthogonale/unitäre Matrizen $U, V$ sowie $s_1, \dots, s_r \in (0,\infty)$ mit

$$
A = \underbrace{U}_{\mathbb{K}^{m\times m}} \underbrace{\begin{pmatrix} s_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & s_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{K}^{m\times n}} \underbrace{V}_{\mathbb{K}^{n\times n}}
$$

$s_1, \dots, s_r$ heißen <u>Singulärwerte</u> von $A$.

*Beweis.* • $A^*A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert und positiv semi-definit.
Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, \infty)$, ONB $b_1, \dots, b_n$ aus Eigenvektoren. Sei $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in (0, \infty)$, $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$ $s_i := \sqrt{\lambda_i}, i \in [n]$

- Es gilt, dass $\overbrace{\frac{1}{s_1}Ab_1}^{b_1'}, \dots, \overbrace{\frac{1}{s_r}Ab_r}^{b_r'}$ Orthonormalsystem in $\mathbb{K}^m$ ist.

$$\begin{aligned}\overline{\langle Ab_i, Ab_j\rangle_{\mathbb{K}^m}} &= \overline{b_i^T A^T \overline{A}\,\overline{b_j}} = \overline{b_i}^T A^* A b_j = \lambda_j \overline{b_i}^T b_j \\ &= \lambda_j \overline{\langle b_i, b_j\rangle_{\mathbb{K}^n}} = \lambda_j \delta_{ij} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

- Ergänze $b_1', \dots, b_r'$ zu Orthonormalbasis $b_1', \dots, b_r', \dots, b_m'$ von $\mathbb{K}^m$.

Sei $\varphi_A \colon x \mapsto A \cdot x \implies {}_{B'}M(\varphi_A)_B = \begin{pmatrix} s_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & s_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

$v = \sum \mu_i b_i \implies Av = \sum \mu_i \underbrace{Ab_i}_{s_i b_i'} = \sum \mu_i s_i b_i'$ □

Mittels der Singulärwertzerlegung können wir für jede Matrix (bzw. lineare Abbildung) eine verallgemeinerte Inverse berechnen.

Sei ${}_{B'}M(\alpha)_B = \begin{pmatrix} s_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & s_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

$\implies \ker(\alpha) = \langle b_{r+1}, \dots, b_n\rangle_V$, $\operatorname{im}(\alpha) = \langle b_1', \dots b_r'\rangle$, $\ker(\alpha)^\perp = \langle b_1, \dots, b_r\rangle_V$

$$\begin{array}{llll}
\alpha\colon V \to \ker(\alpha)^\perp & \xrightarrow{\beta} \operatorname{im}(\alpha) & \to W & \\
\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \mapsto \sum_{i=1}^r \lambda_i b_i & \mapsto \sum_{i=1}^r s_i\lambda_i b_i' & \mapsto \sum_{i=1}^r s_i \lambda_i b_i' & \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} s_1x_1 \\ \vdots \\ s_rx_r \end{pmatrix} & \mapsto \left.\begin{pmatrix} s_1x_1 \\ \vdots \\ s_rx_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} m & \\
\sum_{i=1}^r \frac{\mu_i}{s_i} b_i \hookleftarrow \sum_{i=1}^r \frac{1}{s_i}\mu_i b_i & \underset{\beta^{-1}}{\hookleftarrow} \sum_{i=1}^r \mu_i b_i' & \hookleftarrow \sum_{i=1}^m \mu_i b_i' = w \cdot \alpha^+ &
\end{array}$$

**Bemerkung:**

$\alpha$ invertierbar, $V = W \implies n = m = r \implies \alpha^\dagger = \alpha^{-1}$
Wir haben eine echte Verallgemeinerung.

**Definition 3.6.2:**

- Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit

$$A = U^*\Sigma V, \Sigma = \begin{pmatrix} s_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & s_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

  Dann heißt die Matrix

$$A^\dagger = V^*\Sigma^\dagger U \in \mathbb{K}^{n\times m}, \Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{s_r} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

  (Moore-Penrose) Pseudoinverse von $A$.

- Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), \dim(V), \dim(W) < \infty$ und $B, B'$ Orthonormalbasen mit ${}_{B'}M(\alpha)_B = \Sigma$ und $\alpha^\dagger$ so, dass ${}_BM(\alpha^\dagger)_{B'} = \Sigma^\dagger$. Dann heißt $\alpha^\dagger$ (Moore-Penrose) Pseudoinverse von $\alpha$.

**Satz 3.6.3:**

Seien $V, W$ endlich dimensional euklidische/unitäre Vektorräume,
$\alpha \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gilt:

$$\alpha^\dagger \text{ ist pseudoinverse} \iff \begin{array}{l} \alpha \circ \alpha^\dagger \circ \alpha = \alpha \\ \alpha^\dagger \circ \alpha \circ \alpha^\dagger = \alpha^\dagger \\ \alpha \circ \alpha^\dagger \text{ selbstadjungiert} \\ \alpha^\dagger \circ \alpha \text{ selbstadjungiert} \end{array}$$

*Beweis.* Beweis über Matrizen, da äquivalent. Weiters die $\implies$ Richtung nur für $\mathbb{R}$.

$\Longrightarrow:\ A = U^T\Sigma V, A^\dagger = V^T\Sigma^\dagger U$

$$AA^\dagger = U^T\Sigma \underbrace{VV^T}_{=I}\Sigma^\dagger U = U^T\Sigma\Sigma^\dagger U = U^T \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} U$$

$A^\dagger A$.

$$AA^\dagger A = U^T\Sigma \underbrace{VV^T}_{I}\Sigma^\dagger \underbrace{UU^T}_{I}\Sigma V = U^T \underbrace{\Sigma\Sigma^\dagger\Sigma}_{\Sigma} V = U^T\Sigma V = A$$

$\Longleftarrow:$

- Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}(V,W), \alpha^\dagger \in \mathrm{Hom}(W,V)$

$$\begin{aligned} \ker(\alpha) &= \ker(\alpha^\dagger \circ \alpha) & \mathrm{im}(\alpha) &= \mathrm{im}(\alpha \circ \alpha^\dagger) \\ \ker(\alpha^\dagger) &= \ker(\alpha \circ \alpha^\dagger) & \mathrm{im}(\alpha^\dagger) &= \mathrm{im}(\alpha^\dagger \circ \alpha) \end{aligned} \tag{3.10}$$

  $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\alpha^\dagger \circ \alpha) \subseteq \ker(\alpha \circ \alpha^\dagger \circ \alpha) = \ker(\alpha) \implies \ker(\alpha) = \ker(\alpha^\dagger \circ \alpha)$
  $\mathrm{im}(\alpha) \supseteq \mathrm{im}(\alpha \circ \alpha^\dagger) \supseteq \mathrm{im}(\alpha \circ \alpha^\dagger \circ \alpha) = \mathrm{im}(\alpha) \implies \mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\alpha \circ \alpha^\dagger)$

- $\nu := \alpha^\dagger \circ \alpha$ erfüllt $\nu \circ \nu$ und ist selbstadjungiert für $\nu' := \alpha \circ \alpha^\dagger$
  $\implies \underbrace{\ker(\nu)}_{=\ker(\alpha)} \perp \mathrm{im}(\nu)$ [Sei $v \in \ker(\nu), w = \nu(v) \in \mathrm{im}(\nu) \implies \langle v, w\rangle = \langle \nu(v), w\rangle = 0$]
  $\implies$

  a) $\nu(v) \in \mathrm{im}(\nu)$
  b) $\forall u \in \mathrm{im}(\nu), v \in V:$

$$\begin{aligned} \langle \nu(v) - v, u\rangle = \langle \nu(v) - v, \nu(w)\rangle &= \left\langle \nu^2(v) - \nu(v), w\right\rangle \\ &= \langle \nu(v) - \nu(v), w\rangle = 0 \end{aligned}$$

  $\implies (b_1, \ldots, b_n)$ ONB mit $\langle b_{r+1}, \ldots, b_n\rangle_V = \ker(\nu) = \ker(\alpha)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i &\overset{\nu}{\mapsto} \sum_{i=1}^r \lambda_i b_i [\nu \text{ ist orthogonale Projektion auf } \ker(\alpha)^\perp] \\ \text{Analog:} \sum_{i=1}^m \mu_i b_i' &\overset{\nu'}{\mapsto} \sum_{i=1}^r \mu_i b_i' [\nu' \text{ ist orthogonale Projektion auf } \mathrm{im}(\alpha)] \end{aligned}$$

$$\implies {}_BM(\alpha^\dagger \circ \alpha)_B = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},\ {}_{B'}M(\alpha \circ \alpha^\dagger)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}}_{n} &= {}_BM(\alpha^\dagger)_{B'} \cdot {}_{B'}M(\alpha)_B = \\ &= \begin{pmatrix} a^\dagger_{11} & \dots & a^\dagger_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a^\dagger_{n1} & \dots & a^\dagger_{nm}\end{pmatrix} \left.\underbrace{\begin{pmatrix} s_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & s_r & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}}_{n}\right\} m\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}}_{m} &= {}_{B'}M(\alpha)_B \cdot {}_BM(\alpha^\dagger)_{B'} = \\ &=_m \left\{\underbrace{\begin{pmatrix} s_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & s_r & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}}_{n}\right. \begin{pmatrix} a^\dagger_{11} & \dots & a^\dagger_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a^\dagger_{n1} & \dots & a^\dagger_{nm}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Es gilt $\ker(\alpha^\dagger) = \ker(\nu') = \operatorname{im}(\alpha)^\perp = \left\langle b'_{r+1}, \dots, b'_r \right\rangle \implies a^\dagger_{i\_} = 0 \forall i > r$

$$\Longrightarrow {}_BM(\alpha^\dagger)_{B'} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} a^\dagger_{11} & \dots & a^\dagger_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a^\dagger_{r1} & \dots & a^\dagger_{rr} \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } a^\dagger_{ij} = \delta_{ij} \frac{1}{s_i} \text{ wegen 3.12}$$

□

**Satz 3.6.4:**

Sei $\alpha \in \operatorname{Hom}(V, W)$.

- $\alpha$ injektiv $\implies \alpha^\dagger = (\alpha^* \circ \alpha)^{-1} \circ \alpha^*$
- $\alpha$ surjektiv $\implies \alpha^\dagger = \alpha^* \circ (\alpha \circ \alpha^*)^{-1}$

*Beweis.* Sei $\alpha$ injektiv $\implies \alpha^* \circ \alpha$ bijektiv. Angenommen $\alpha^* \circ \alpha$ nicht surjektiv $\implies$

$$\begin{aligned} \exists w \in V \setminus \{0\} \colon \forall v \in V \colon \langle \alpha^* \circ \alpha(v), w \rangle &= 0 \\ \implies \forall v \colon \langle \alpha(v), \alpha(w) \rangle_W &= 0 \\ \implies \alpha(w) \in \operatorname{im}(\alpha)^\perp \cap \operatorname{im}(\alpha) \implies \alpha(w) &= 0 \\ \overset{\alpha \text{ injektiv}}{\implies} w &= 0 \text{↯} \end{aligned}$$

$\implies \beta := (\alpha^* \circ \alpha)^{-1} \circ \alpha^*$ ist wohldefiniert. Nun gilt:

- $\alpha \circ \beta \circ \alpha = \alpha \circ (\alpha^* \circ \alpha)^{-1} \circ \alpha^* \circ \alpha = \alpha$
- $\beta \circ \alpha \circ \beta = (\alpha^* \circ \alpha)^{-1} \circ \alpha^* \circ \alpha \circ \beta = \beta$
- $\beta \circ \alpha, \alpha \circ \beta$ sind selbstadjungiert.

$\underset{\text{Satz 3.6.3}}{\Longrightarrow} \beta = \alpha^\dagger$ □

**Anwendung: Methode der kleinsten Quadrate**

Sei $Ax = b$ Lineares Gleichungssystem mit $L(A, b) = \emptyset$. Versuche ein $x$ zu finden mit $\|Ax - b\|_{\mathbb{K}^m}$ minimal, $\|\alpha(v) - w\|$ minimal. Sei $b_1, \dots, b_n$ Orthonormalbasis von $V$, $b'_1, \dots, b'_m$ ONB von $W$. $\langle b_1, \dots, b_r\rangle = \ker(\alpha)^\perp, \langle b'_1, \dots b'_r\rangle = \operatorname{im}(\alpha)$ $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \implies \alpha(v) = \sum_{i=1}^r s_i \lambda_i b'_i$ $w = \sum_{i=1}^n \mu_i b'_i$

$$\|\alpha(v) - w\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^r s_i \lambda_i b'_i - \sum_{i=1}^m \mu_i b'_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^r (s_i \lambda_i - \mu_i)^2 + \sum_{i=r+1}^m \mu_i^2$$

Wird minimal wenn $\lambda_i = \frac{\mu_i}{s_i}, i \in [r]$, das heißt das optimale $v$ ist durch $v^\dagger = \alpha^\dagger(w)$ gegeben. $\left[\text{Alle optimalen durch } v^\dagger + \sum_{j=r+1}^m \mu_j^2 = L(\alpha^*\alpha, \alpha^*(w))\right]$

**Satz 3.6.5:**

Sei $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, V, W$ endlich dimensional. Sei $w \in W$. Dann gilt mit $v^\dagger = \alpha^\dagger(w)$ dass

$$\left\|\alpha(v^\dagger) - w\right\| = \min_{v \in V} \|\alpha(v) - w\|$$

Alle Vektoren mit dieser Eigenschaft erfüllen die

$\underline{\text{Normalgleichungen}}$ $\begin{array}{c} \alpha^*\alpha(v) = \alpha^*(w) \\ A^*Ax = A^*b \end{array}$

*Beweis.* Angenommen $L(A, b) \neq \emptyset$. $\to$ Suche $v \in L(A, b)$ mit minimaler Norm: Sei $w \in \operatorname{im}(\alpha) \implies w = \sum_{j=1}^r \mu_j b'_j$

$$\implies L(\alpha, w) = \left\{ \sum_{j=1}^r \frac{\mu_j}{s_j} b_j + \sum_{j=r+1}^n \lambda_j b_j \colon \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}$$

Minimale Norm, wenn $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n = 0$ das heißt für $v = \sum_{i=1}^r \frac{\mu_i}{s_i} b_i = \alpha^\dagger(w)$ □

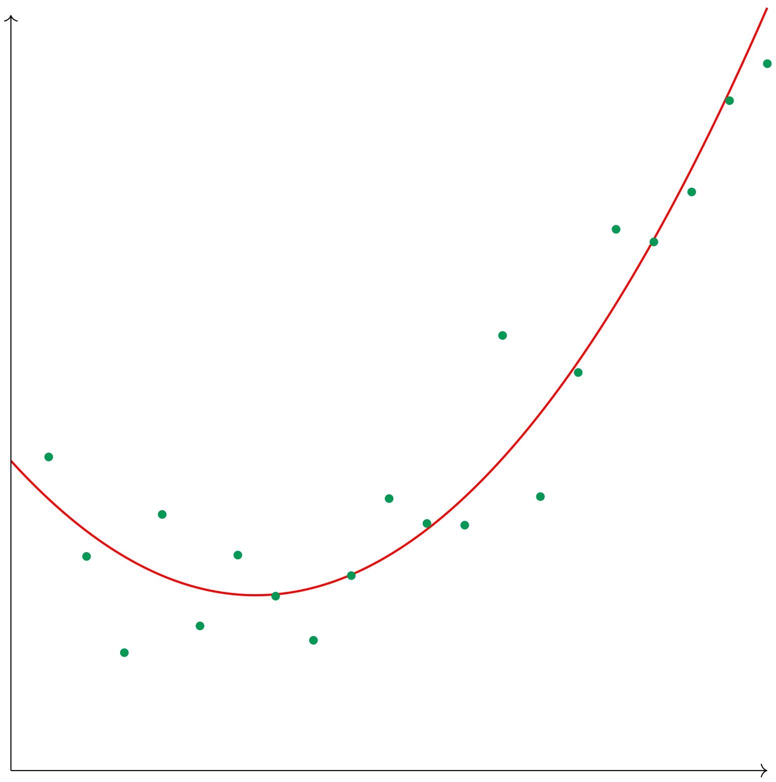
**Satz 3.6.6:**

Sei $\alpha \in \operatorname{Hom}(V, W), w \in \operatorname{im}(\alpha)$. Dann gilt mit $v^\dagger = \alpha^\dagger(w)$:

$$\left\|v^\dagger\right\| = \min\{\|v\| : \alpha(v) = w\}$$

**Beispiel (lineare Regression)**

$(t_i, y_i)_{i=1}^m$ gegeben. Wollen Polynome finden, die gut auf die Messungen passen. Suchen also $p$: $p(t_i) \sim y_i, \forall i \in [m]$




$$\text{minimiere } \sum_{i=1}^m (f(t_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^m (a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 - y_i)^2 = \|Ax - b\|_{\mathbb{K}^m}^2 \text{ wobei}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

**Anwendung: Ausgleichsquadrik**

Problem: homogenes LGS $Ax = 0$. Finde $x$ mit $\|x\| = 1$ und $\|Ax\|$ minimal.
$b_1, \ldots, b_n$ ONB aus EVen von $A^*A$ mit nichtnegativen EWen.

$$X = \sum \lambda_i b_i \implies \|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle$$
$$= \langle A^*Ax, x \rangle = \left\langle \sum s_i \lambda_i b_i, \sum \lambda_j b_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n s_i |\lambda_i|^2$$

$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n, \|x\| = \sum |\lambda_i|^2$

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\sum s_i |\lambda_i|^2}{\sum |\lambda_i|^2} \geq \frac{s_1 \sum |\lambda_i|^2}{\sum |\lambda_i|^2} s_1$$

$\|x\| = 1 \implies \|Ax\| \geq s_1 \|b_i\| \implies \lambda_1, \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \implies \|Ab_1\| = s_1 \implies b_1$ löst unser Minimierungsproblem.
$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \psi(x, y) = 0\}$
$\psi(x, y) := a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2a_4x + a_5y + a_6$
Gegeben: $(x_i, y_i)_{i=1}^m$ Suche $x = (a_1, \dots, a_6)^T$ mit $\|x\| = 1$ sodass

$$\sum_{i=1}^m \left(a_1x_i^2 + a_2x_iy_i + a_3y_i^2 + a_4x_i + a_5y_i + a_6\right)^2 = \|Ax\|^2$$

minimal. $A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m^2 & x_my_m & y_m^2 & x_m & y_m & 1 \end{pmatrix}$
Suche $x \in \mathbb{R}^6$ mit $\|x\| = 1$ und $\|Ax\|$ minimal. $\implies$ $x$ ist Eigenvektor von $A^*A$ zum kleinsten Eigenwert.

**Satz:**

Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^n$ Eigenvektor von $A^*A$ zum kleinsten Eigenwert $r_1$. Dann gilt

$$\frac{\|Ab\|}{\|b\|} = \min \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \colon x \in \mathbb{R}^n \right\} = \sqrt{r_1}$$