

Komplexe Analysis

Olivia Constantin

L^AT_EX-Satz: Anton Mosich

Wintersemester 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Komplexe Zahlen und Funktionen	3
1.1	Komplexe Zahlen	3
1.1.1	Komplex konjugierte Zahl zu z	3
1.1.2	Polardarstellung und Argument	4
1.2	Topologische Begriffe	6
1.3	Stereographische Projektion	7
1.4	Holomorphe Funktionen	8
1.4.1	Die Cauchy-Riemann Gleichungen	11
1.4.2	Beziehung zur reellen Differenzierbarkeit	12
1.5	Winkeltreue	15
1.6	Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen/-reihen	17
1.7	Potenzreihen	19
1.7.1	Elementare Funktionen	24
1.7.2	Der komplexe Logarithmus	27
2	Der Cauchy'sche Integralsatz	31
2.1	Kurvenintegrale	31
2.2	Stammfunktionen	35
2.2.1	Wahl von stückweise stetig differenzierbarer Argumentfunktion eines Pfades	41
2.3	Windungszahlen	42
2.4	Der Satz von Cauchy für Sterngebiete	50
2.5	Wichtige Folgerungen des Integralsatzes von Cauchy	53
2.6	Nullstellen	59
2.7	Das Maximumprinzip und Cauchy'sche Abschätzungen, der Satz von Liouville	63
2.8	Singularitäten	68
2.9	Satz der offenen Abbildung	73
2.10	Allgemeine Versionen des Cauchy'schen Integralsatzes	74
2.10.1	Anwendungen	85

1 Komplexe Zahlen und Funktionen

1.1 Komplexe Zahlen

Historisch sind die komplexen Zahlen aus dem Bedarf entstanden, polynomiale Gleichungen zu lösen (wie zum Beispiel $z^2 = -1$ Wurzeln aus negativen Zahlen). Die Cardanischen Formeln für die Lösung kubischer/quartischer Gleichungen waren eine wichtige Motivation für die Einführung komplexer Zahlen. Die Formeln enthalten komplexe Zahlen, auch wenn alle Lösungen reell sind.

- $\mathbb{R}^2$ Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der Multiplikation

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

wird $\mathbb{R}^2$ zu einem Körper (mit Nullelement $(0, 0)$ und Einselement $(1, 0)$) den wir mit $\mathbb{C}$ bezeichnen (und die Elemente aus $\mathbb{C}$ werden komplexe Zahlen genannt).

- $(a, b) \neq (0, 0)$ hat das inverse Element

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Setze $i := (0, 1)$ und identifiziere jedes Element $(a, 0) \in \mathbb{C}$ mit der reellen Zahl a . Dadurch wird $\mathbb{R}^2 \ni (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ mit $a + ib$ identifiziert. Es gilt $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$ und somit $i = \sqrt{-1}$. Notation von Euler 1777.

(Mit $i^2 = -1$ und den Eigenschaften von Multiplikation in einem Körper kann man dann $(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$ leicht berechnen.)

$$z \in \mathbb{C}, \quad z = (x + iy), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$x = \Re z \dots$ Realteil von z , $y = \Im z \dots$ Imaginärteil von z .

1.1.1 Komplex konjugierte Zahl zu z

$$\bar{z} = x - iy$$

(Motivation: $z = x + iy$ Nullstelle eines Polynoms P mit reellen Koeffizienten $\iff \bar{z} = x - iy$ Nullstelle von P)

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

BETRAG: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$. Es gilt $|zw| = |z||w|$, $|z + w| \leq |z| + |w|$.

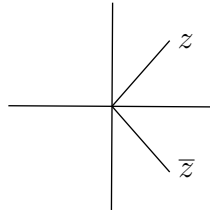


Abbildung 1.1: Komplex konjugierte Zahl

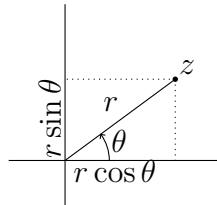


Abbildung 1.2: Polardarstellung

1.1.2 Polardarstellung und Argument

$$\begin{aligned} z &= x + iy \neq 0 \\ x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \\ z &= r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$r = |z|$ Betrag, jedes θ , das Gleichung (1.1) erfüllt, heißt ARGUMENT um z . $\exists$ unendlich viele Argumente von z (die sich durch ein Vielfaches von 2π unterscheiden). Ist θ ein Argument von z , dann sind

$$\arg z = \theta + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

alle möglichen Argumente von z .

Um die Polardarstellung eindeutig zu machen, wählen wir den Repräsentant im Intervall $(-\pi, \pi]$ und nennen den das HAUPTARGUMENT von z . *Notation:* $\text{Arg } z, -\pi < \text{Arg } z \leq \pi$. Die Funktion $\text{Arg}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$ ist in $z \in \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 0\}$ nicht stetig.

(Arg hat unterschiedliche Grenzwerte, wenn man sich der negativen x -Achse von „oben“ beziehungsweise von „unten“ annähert.)

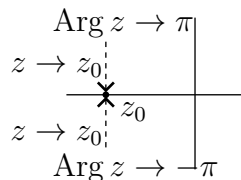


Abbildung 1.3: Unterschiedliche Grenzwerte von Arg

$$\forall z_0 \in \mathbb{R}^-, z_0 \neq 0: \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \Im z > 0}} = \pi, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \Im z < 0}} = -\pi.$$

Die Einschränkung von Arg zu $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ ist aber stetig. Beweis siehe Übung. Analog kann man für das Argument jedes Intervall von Länge 2π betrachten.

Allgemein: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, setze $\arg_\alpha z := \theta$, wobei

$$\begin{cases} z = re^{i\theta} \\ \alpha - 2\pi < \theta \leq \alpha. \end{cases}$$

Sei $\mathbb{C}_\alpha := \mathbb{C} \setminus R_\alpha$, wobei $R_\alpha := \{re^{i\alpha}, r \geq 0\}$. $\arg_\alpha$ ist stetig auf $\mathbb{C}_\alpha$.

$$\arg_\pi = \text{Arg}.$$

Satz:

Es gibt keine stetige Argumentfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, das heißt es existiert keine stetige Funktion $A: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}: z = |z| e^{iA(z)} \quad (1.2)$$

Beweis. Nehmen an $\exists: A: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, die Gleichung (1.2) erfüllt. Dann ist

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi}(A(e^{it}) - t), \quad t \in \mathbb{R}$$

stetig. Da t und $A(e^{it})$ zwei Argumente von e^{it} sind, existiert $k = k(t) \in \mathbb{Z}$ mit $A(e^{it}) - t = k \cdot 2\pi$. Dann sind alle Werte von ψ ganze Zahlen, das heißt $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$. Aus $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ stetig, $\mathbb{R}$ zusammenhängend folgt nun, dass $\psi(\mathbb{R})$ zusammenhängend ist. Daher ist ψ konstant auf $\mathbb{R}$: $\psi \equiv k$. Insbesondere gilt

$$\psi(0) = \psi(2\pi) \iff \frac{1}{2\pi}(A(1) - 0) = \frac{1}{2\pi}(A(1) - 2\pi) \iff 0 = 2\pi,$$

ein Widerspruch. □

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \theta + i \sin \theta), & \theta &= \text{Arg } z \\ w &= s(\cos \varphi + i \sin \varphi), & \varphi &= \text{Arg } w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= rs((\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi)) \\ &= rs(\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)) = rse^{i(\theta + \varphi)} \end{aligned}$$

$\theta + \varphi$ ist ein Argument von $z \cdot w$, aber nicht notwendigerweise das Hauptargument.

$$\text{Arg}(zw) = \text{Arg } z + \text{Arg } w \iff \text{Arg } z + \text{Arg } w \in (-\pi, \pi].$$

($\text{Arg}(zw) = \text{Arg } z + \text{Arg } w + n_0 \cdot 2\pi$, wobei n_0 so gewählt wird, dass $\text{Arg } z + \text{Arg } w + n_0 \cdot 2\pi \in (-\pi, \pi]$.)

De Moivre'sche Formel: Sei $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}, z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Induktiv folgt

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = r^n e^{in\theta}.$$

n -te Wurzeln einer komplexen Zahl: Sei $n \in \mathbb{N}, z \neq 0, z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Die allgemeine Lösung von $w^n = z$ ist durch

$$w = w_k = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \right) = r^{\frac{1}{n}} e^{i \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right)}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

gegeben. $\exists$ also n verschiedene n -te Wurzeln von z .

1.2 Topologische Begriffe

Notation: für $z \in \mathbb{C}, r > 0, D_r(z) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$.

- $G \subseteq \mathbb{C}$ OFFEN $\stackrel{\text{Def.}}{\iff} \forall z \in G: \exists \varepsilon > 0$ sodass $D_\varepsilon(z) \subseteq G$.
- $A \subseteq \mathbb{C}$ ABGESCHLOSSEN $\stackrel{\text{Def.}}{\iff} \mathbb{C} \setminus A$ ist offen.

Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ eine Menge.

- $\overset{\circ}{M} = \{z \in M : \exists \delta > 0 \text{ mit } D_\delta(z) \subset M\}$ heißt das INNERE von M .
- $\partial M = \{z \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0: D_\varepsilon(z) \cap M \neq \emptyset \text{ und } D_\varepsilon(z) \cap (\mathbb{C} \setminus M) \neq \emptyset\}$ heißt der RAND von M .
- $\overline{M} := \overset{\circ}{M} \cup \partial M$ heißt der ABSCHLUSS von M .
- $K \subset \mathbb{C}$ heißt KOMPAKT, wenn jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge besitzt.
 $K \subset \mathbb{C}$ kompakt $\iff K$ beschränkt und abgeschlossen.
- $X \subseteq \mathbb{C}$ heißt zusammenhängend, wenn aus $X \subseteq O_1 \cup O_2$ mit O_1, O_2 offen und disjunkt (das heißt $O_1 \cap O_2 = \emptyset$) folgt, dass $X \subseteq O_1$ oder $X \subseteq O_2$.
- Eine offene zusammenhängende Menge heißt GEBIET.

Für eine offene Menge $G \subseteq \mathbb{C}$ gilt:

$$G \text{ zusammenhängend} \iff G \text{ wegzusammenhängend},$$

das heißt $\forall z, w \in G: \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow G$ stetig mit $\gamma(0) = z$ und $\gamma(1) = w$ (je zwei Punkte können durch eine stetige, ganz in der Menge verlaufende Kurve verbunden werden).
 $\iff \forall z, w \in G \exists$ Polygonzug (Streckenzug) von z nach w innerhalb von G (sogar mit achsenparallelen Geradenstücken).

Gegeben $X \subseteq \mathbb{C}$ und $x \in X$, sei E_x die größte zusammenhängende Teilmenge von X , die x enthält. E_x heißt ZUSAMMENHANGSKOMPONENTE von X .

Bemerkung: $X =$ Vereinigung aller ihrer Zusammenhangskomponenten.

Durch die Identifizierung von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ werden Begriffe wie Limes, Stetigkeit für Funktionen $f: M \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ von $\mathbb{R}^2$ übertragen.

1.3 Stereographische Projektion

- Einheitssphäre $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, $N = (0, 0, 1)$ Nordpol
- Projiziere S^2 von N auf die x_1, x_2 Ebene ($\mathbb{C}$). $\lambda \in S^2 \setminus \{N\} \xrightarrow{\Phi}$ Schnittpunkt der Verbindungsgerade durch N und λ mit der x_1, x_2 Ebene, siehe [Abbildung 1.4](#).

$$\Phi: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \Phi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right) = \frac{1}{1 - x_3}(x_1 + ix_2)$$

stetig.

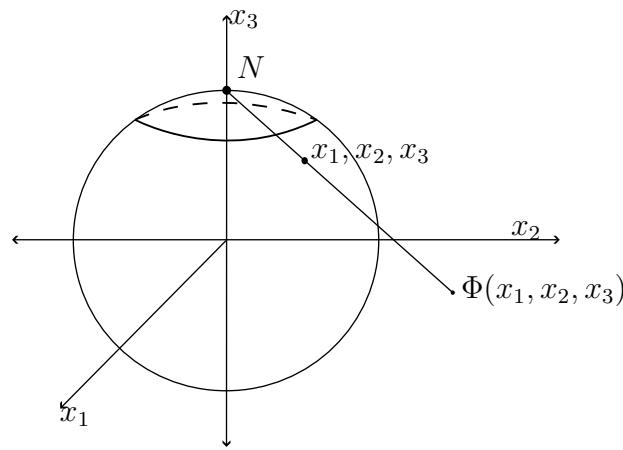


Abbildung 1.4: Projektionsskizze

- Φ ist bijektiv mit stetiger Inverse (siehe Übung).

$$\Phi^{-1}(a + ib) = \frac{1}{a^2 + b^2 + 1}(2a, 2b, a^2 + b^2 - 1)$$

Bemerkung:

$$\lim_{(x_1, x_2, x_3) \rightarrow N} |\Phi(x_1, x_2, x_3)|^2 = \lim \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \lim \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \lim \frac{1 + x_3}{1 - x_3} = \infty$$

Jede Polarkappe um N wird auf das Komplement einer Kreisscheibe um 0 mit Radius r abgebildet, $r \rightarrow \infty$ als wir uns N annähern.

Einpunktkompaktifizierung

Wir möchten Φ zu einem Homöomorphismus auf S^2 erweitern. Betrachte die erweiterte Ebene (RIEMANN'SCHE KUGEL)

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Topologie auf $\overline{\mathbb{C}}$:

$$D_r(\infty) := \{\infty\} \cup \{z: |z| > r\}.$$

$E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ $\xLeftrightarrow{\text{Def}}$ E = Vereinigung von $D_r(a)$ mit $a \in \overline{\mathbb{C}}$ und $r > 0$. Setze $\Phi(N) := \infty$. Somit erhalten wir einen Homöomorphismus $\Phi: S^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Da S^2 kompakt ist, folgt $\overline{\mathbb{C}}$ kompakt.

Motivation: manche Singularitäten zu eliminieren. $f(z) = \frac{1}{z}$ stetig auf $\overline{\mathbb{C}}$ ($f(0) = \infty$), die Rationale Funktion stetig auf $\overline{\mathbb{C}}$.

Bemerkung (Freiwillig):

Die obige Topologie auf $\overline{\mathbb{C}}$ wird zum Beispiel von der *chordalen Metrik* induziert. Die chordale Metrik wird durch

$$d_c(z, w) = \|\Phi^{-1}(z) - \Phi^{-1}(w)\|_2, \quad z, w \in \overline{\mathbb{C}},$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Explizit

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \quad d_c(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad d_c(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}$$

$$d_c(\infty, \infty) = 0.$$

Es gilt $d_c(z, w) \leq 2 \forall z, w \in \overline{\mathbb{C}}$.

1.4 Holomorphe Funktionen

Definition:

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$.

1. f heißt KOMPLEX DIFFERENZIERBAR IN $z_0 \in U$, wenn der Limes

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert, das heißt $\exists a \in \mathbb{C}$ sodass

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: 0 < |z - z_0| < \delta \implies \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - a \right| < \varepsilon.$$

Der Limes „ a “ wird ABLEITUNG von f in z_0 genannt und mit $f'(z_0)$ bezeichnet.

2. f heißt HOLOMORPH AUF U , wir schreiben auch $f \in \mathcal{H}(U)$, wenn f in jedem $z \in U$ komplex differenzierbar ist.

Notation(Landau): Gegeben $f, g: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ schreiben wir $f = o(g)$ für $z \rightarrow w$ wenn $\lim_{z \rightarrow w} \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| = 0$.

Bemerkung: $f = o(g) \iff f = o(|g|)$.

Satz 1.1:

f komplex differenzierbar in $z_0 \iff \exists a \in \mathbb{C}$ sodass

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + o(|z - z_0|) \text{ für } z \rightarrow z_0 \quad (1.3)$$

Folgerung: f komplex differenzierbar in $z_0 \implies f$ stetig in z_0 .

Beweis. $\implies$: Sei f komplex differenzierbar in z_0 und setze

$$g(z) = f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0).$$

Es gilt

$$\left| \frac{g(z)}{z - z_0} \right| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \frac{z - z_0}{z - z_0} \right| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$$

$\implies g(z) = o(|z - z_0|)$. Dann gilt **Gleichung (1.3)** mit $a := f'(z_0)$.

$\Leftarrow$: Angenommen **Gleichung (1.3)** gilt.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \stackrel{1.3}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{a(z - z_0) + o(|z - z_0|)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} a + \frac{o(|z - z_0|)}{|z - z_0|} = a. \quad \square$$

Beispiel:

1. $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \\ &\stackrel{n \geq 1}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1})}{(z - z_0)} = nz_0^{n-1} \end{aligned}$$

Es gilt $f'(z_0) = \begin{cases} nz_0^{n-1} & n \geq 1 \\ 0 & n = 0. \end{cases}$

2. $f(z) = \bar{z}$ ist überall in $\mathbb{C}$ reell differenzierbar ($f(x, y) = (x, -y)$), aber

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{\bar{z} + \bar{h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

und

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{\bar{z} + \bar{i} \cdot \bar{h} - \bar{z}}{ih} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-i}{i} = -1.$$

$\Rightarrow f$ ist in keinem $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Satz 1.2:

Seien f, g komplex differenzierbar in z und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

1. Dann sind $\lambda f + \mu g$ und $f \cdot g$ komplex differenzierbar in z mit

$$(\lambda f + \mu g)'(z) = \lambda f'(z) + \mu g'(z) \text{ und } (fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

2. Falls $g(z) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in z und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}.$$

3. Falls h komplex differenzierbar in $f(z)$, dann ist $h \circ f$ komplex differenzierbar in z und es gilt

$$(h \circ f)'(z) = h'(f(z)) \cdot f'(z).$$

Beweis. Wort für Wort wie im reellen Fall. □

Beispiel (Fortsetzung):

3. Aus **Punkt 1** und der Quotientenregel folgt nun

$$\left(\frac{1}{z^n}\right)' = \frac{-nz^{n-1}}{z^{2n}} = (-n) \cdot z^{-n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$f = u + iv = (u, v)$ reell differenzierbar $\iff$ jede Komponente reell differenzierbar. Für die komplexe Differenzierbarkeit stimmt das Obige nicht! Es stellt sich heraus, dass es eine gewisse Beziehung zwischen den Komponenten $(\Re f, \Im f)$ geben muss, um zu sichern, dass die Limiten vom Differenzenquotient in den Achsenparallelen Richtungen zusammenfallen.

1.4.1 Die Cauchy-Riemann Gleichungen

Satz 1.3:

Sei $f: U \stackrel{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $z_0 \in U$ mit $u = \Re f$ und $v = \Im f$, also $f = u + iv$. Dann existieren die partiellen Ableitungen von u und v in z_0 und es gelten die CAUCHY-RIEMANN GLEICHUNGEN:

$$\begin{aligned} u_x(z_0) &= v_y(z_0), \\ u_y(z_0) &= -v_x(z_0). \end{aligned}$$

Zusätzlich gilt

$$f'(z_0) = \underbrace{u_x(z_0) + iv_x(z_0)}_{=f_x(z_0)} = \underbrace{v_y(z_0) - iu_y(z_0)}_{-if_y(z_0)}. \quad (1.4)$$

Beweis. f komplex differenzierbar in $z_0 = (x_0, y_0) \iff \exists \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0+w) - f(z_0)}{w} =: f'(z_0)$. Insbesondere $\exists$ die Limiten (in den achsenparallelen Richtungen).

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \\ &= u_x(z_0) + iv_x(z_0) \\ \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{ih} + i \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{ih} \\ &= (-i)u_y(z_0) + v_y(z_0) \end{aligned}$$

und beide sind gleich $f'(z_0)$. Also

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0)$$

und somit gelten die Cauchy-Riemann Gleichungen. □

Bemerkung:

Die Cauchy-Riemann Gleichungen sind für die komplexe Differenzierbarkeit notwendig, aber nicht hinreichend (Sie „sehen“ nur die achsenparallelen Richtungen)!

Gegenbeispiel:

$$f(z) = f(x + iy) = \begin{cases} 1 & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir haben $v = \Im f = 0, u = \Re f = f$, also

$$\begin{aligned} u(x, 0) \equiv 0 &\implies u_x(0, 0) = 0 = v_y(0, 0) \\ u(0, y) \equiv 0 &\implies u_y(0, 0) = 0 = -v_x(0, 0) \end{aligned}$$

$\implies$ Cauchy-Riemann Gleichungen sind in $(0, 0)$ erfüllt. Aber f ist in $z = 0$ nicht komplex differenzierbar, da f in $(0, 0)$ nicht stetig ist.

Auch wenn f stetig in z_0 ist, sind die Cauchy-Riemann Gleichungen nicht genügend, siehe Übung.

1.4.2 Beziehung zur reellen Differenzierbarkeit

Sei $f: U \stackrel{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f = u + iv$, also $u = \Re f, v = \Im f$. Durch die Identifizierung von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$, identifizieren wir f mit der vektorwertigen Funktion $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Sei $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ und nehme an, dass f partiell differenzierbar in z_0 ist, das heißt $\exists f_x(z_0), f_y(z_0)$. Dann gilt: f reell differenzierbar in $z_0 \iff$

$$f(z) = f(z_0) + \overbrace{(x - x_0) f_x(z_0) + (y - y_0) f_y(z_0)}^{D_f(z_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}} + o(|z - z_0|),$$

$(u_x(z_0), v_x(z_0)) \qquad (u_y(z_0), v_y(z_0))$

für $z \rightarrow z_0$, wobei $z = (x, y)$ und $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. In der komplexen Notation wird die obige Gleichung zu

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \frac{\overbrace{(x - x_0) = \Re(z - z_0)}}{(z - z_0) + \overline{(z - z_0)}} f_x(z_0) + \frac{\overbrace{(y - y_0) = \Im(z - z_0)}}{(z - z_0) - \overline{(z - z_0)}} f_y(z_0) + o(|z - z_0|) \\ &= f(z_0) + (z - z_0) \frac{1}{2} (f_x(z_0) - i f_y(z_0)) + \overline{(z - z_0)} \frac{1}{2} (f_x(z_0) + i f_y(z_0)) + o(|z - z_0|) \end{aligned}$$

für $z \rightarrow z_0$, und somit gilt f reell differenzierbar in $z_0 \iff$

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \overline{(z - z_0)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) + o(|z - z_0|), \quad (1.5)$$

für $z \rightarrow z_0$, wobei

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Definition:

$\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ heißen Wirtinger-Ableitungen (Wirtinger war bis 1945 Professor in Wien und Innsbruck).

Proposition 1.4:

f erfüllt die Cauchy-Riemann Gleichungen in $z_0 \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. Also beide Gleichungen in einer komprimiert.

Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (u_x + i v_x + i(u_y + i v_y)) \\ &= \frac{1}{2} ((u_x - v_y) + i(v_x + u_y))\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \xLeftrightarrow[\Re=0]{\Im=0} u_x = v_y \text{ und } u_y = -v_x.$$

□

Satz 1.5:

$f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar in $z_0 \in U \iff f$ ist reell differenzierbar in z_0 und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. In diesem Fall gilt $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ und die Jacobideterminante von f in z_0 ist $J_f(z_0) = |f'(z_0)|^2$.

Beweis. $\Leftarrow$: Falls f reell differenzierbar in z_0 ist und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, erhalten wir aus [Gleichung \(1.5\)](#), dass

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + o(|z - z_0|)$$

für $z \rightarrow z_0$. Laut [Theorem 1.1](#) ist f komplex differenzierbar in z_0 und

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

$\Rightarrow$: Sei f komplex differenzierbar in z_0 . Aus [1.3?? 1.4](#) folgt nun, dass $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Es bleibt zu zeigen, dass f reell differenzierbar in z_0 ist. Der [Theorem 1.1](#) ergibt

$$f(z) = f(z_0) + \underbrace{(z - z_0)}_{=(x-x_0)+i(y-y_0)} f'(z_0) + o(|z - z_0|) \text{ für } z \rightarrow z_0$$

$\iff$

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0) \underbrace{f'(z_0)}_{=f_x(z_0) \text{ (1.3)}} + (y - y_0) \underbrace{(i f'(z_0))}_{=f_y(z_0) \text{ (1.3)}} + o(|z - z_0|) \text{ für } z \rightarrow z_0$$

und somit folgt nun, dass f in z_0 reell differenzierbar ist. Die Jacobideterminante

$$J_f(z_0) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}_{|z=z_0} = (u_x v_y - u_y v_x)(z_0) \\ \stackrel{1.3}{=} (u_x(z_0))^2 + (v_x(z_0))^2 = |f_x(z_0)|^2 \stackrel{1.3}{=} |f'(z_0)|^2. \quad \square$$

Wichtiges Korollar: sind die partiellen Ableitungen von u, v stetig in z_0 und erfüllen sie die Cauchy-Riemann Gleichungen in z_0 , dann ist $f = u + iv$ komplex differenzierbar in z_0 .

Für offene Mengen gilt sogar mehr:

Satz (Satz von Looman-Menchoff):

Sei $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, stetig auf U . Existieren u_x, u_y, v_x, v_y und erfüllen sie die Cauchy-Riemann Gleichungen auf ganz U , so ist f auf U holomorph.

Beweis. Nicht verlangt! Siehe Referenz im Skriptum $\rightarrow$ Narasimhan-Nievergelt. $\square$

Beispiel:

$$1. \quad f(x + iy) = \underbrace{e^x \cos y}_u + i \underbrace{e^x \sin y}_v.$$

$$u_x = e^x \cos y = v_y, \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x$$

$\implies u_x, u_y, v_x, v_y$ erfüllen die Cauchy-Riemann Gleichungen und sind stetig auf $\mathbb{C} \implies f$ holomorph auf $\mathbb{C}$.

$$f(z) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^z,$$

komplexe Exponentialfunktion (wird später gezeigt).

2. $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 \implies u = x^2 + y^2, v \equiv 0. u_x = 2x, u_y = 2y, v_x = v_y = 0$ stetig auf $\mathbb{C}$. Also sind die Cauchy-Riemann Gleichungen *nur in* $z = 0$ erfüllt $\implies f$ komplex differenzierbar in $z = 0$, nicht komplex differenzierbar in $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Bemerkung:

Beim Differenzieren nach z und $\bar{z}$ kann man so vorgehen, als wären z und $\bar{z}$ voneinander unabhängige Variablen.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z \cdot |z|^2) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z \cdot z \cdot \bar{z}) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^2 \cdot \bar{z}) = z^2.$$

Bemerkung (Geometrische Bedeutung):

f komplex differenzierbar in $z_0 \iff f$ reell differenzierbar in z_0 und die lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \mapsto (D_f(z_0)) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ ist eine Streckung gefolgt von einer Rotation.

Beweis. $\implies$: Aus **Theorem 1.3** folgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}_{|z=z_0} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} u_x(z_0) \\ v_x(z_0) \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} u_y(z_0) \\ v_y(z_0) \end{pmatrix} \\ &= hf_z(z_0) + kf_y(z_0) \stackrel{1.3}{=} hf'(z_0) + ikf'(z_0) = f'(z_0)(h + ik) \\ &= |f'(z_0)| e^{i \operatorname{Arg} f'(z_0)} \cdot (h + ik), \end{aligned}$$

also Streckung mit $|f'(z_0)|$ gefolgt von Rotation mit $\operatorname{Arg} f'(z_0)$.

$\impliedby$: Falls

$$D_f(z_0) \stackrel{\text{Def}}{=} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}_+,$$

Dann sind die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllt. □

1.5 Winkeltreue

Definition:

Der ORIENTIERTE WINKEL zwischen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist der Winkel $\theta \in (-\pi, \pi]$ mit $\frac{w}{|w|} = e^{i\theta} \cdot \frac{z}{|z|}$, das heißt $\theta = \operatorname{Arg} \left(\frac{\frac{w}{|w|}}{\frac{z}{|z|}} \right) = \operatorname{Arg} \left(\frac{w}{z} \right)$.

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine differenzierbare Kurve, das heißt $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$) mit $x, y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Sei $t_0 \in [a, b]$ und $z_0 = \gamma(t_0)$. Falls $\gamma'(t_0) \neq 0$, dann ist $\gamma'(t_0)$ ein Tangentialvektor zu γ in $z_0 = \gamma(t_0)$.

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z_0 . Für die Bildkurve $f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(t_0)$$

(folgt direkt über Kettenregel im reellen Fall: $(f \circ \gamma)'(t_0) = (D_f(z_0))\gamma'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0)$).

Seien nun $\gamma_j: [a_j, b_j] \rightarrow U$ differenzierbare Kurven mit $j = 1, 2$ und $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$ und $\gamma'_1(t_1), \gamma'_2(t_2) \neq 0$.

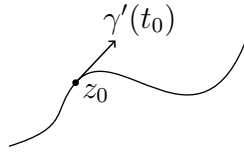


Abbildung 1.5: Tangentialvektor einer Kurve

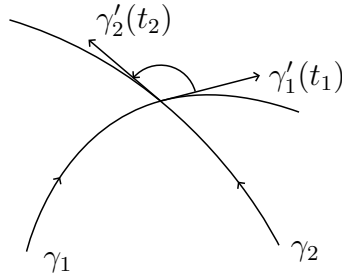


Abbildung 1.6: Winkel zwischen Tangentialvektoren

Der *Winkel zwischen γ_1 und γ_2 im Schnittpunkt $z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$* ist der orientierte Winkel ($\in (-\pi, \pi]$) zwischen den Tangentialvektoren $\gamma'_1(t_1)$ und $\gamma'_2(t_2)$.

Behauptung: Falls $f'(z_0) \neq 0$, dann ist der Winkel zwischen γ_1 und γ_2 in $z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ gleich dem Winkel zwischen den Bildkurven $f \circ \gamma_1$ und $f \circ \gamma_2$ in $f(z_0) = f(\gamma_1(t_1)) = f(\gamma_2(t_2))$, das heißt f ist WINKELTREU in z_0 (auch KONFORM genannt).

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma_1)'(t_1) &= f'(\gamma_1(t_1)) \cdot \gamma'_1(t_1) = f'(z_0) \cdot \gamma'_1(t_1) \\ (f \circ \gamma_2)'(t_2) &= f'(\gamma_2(t_2)) \cdot \gamma'_2(t_2) = f'(z_0) \cdot \gamma'_2(t_2),\end{aligned}$$

also werden $\gamma'_1(t_1), \gamma'_2(t_2)$ mit $f'(z_0) = |f'(z_0)| e^{i \operatorname{Arg} f'(z_0)}$ multipliziert. Geometrisch entspricht das einer Drehung mit Winkel $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ gefolgt von einer Streckung mit $|f'(z_0)| \implies$ Winkel sind bewahrt. Tatsächlich gilt

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{(f \circ \gamma_2)'(t_2)}{(f \circ \gamma_1)'(t_1)} \right) = \operatorname{Arg} \left(\frac{f'(z_0) \cdot \gamma'_2(t_2)}{f'(z_0) \cdot \gamma'_1(t_1)} \right) = \operatorname{Arg} \left(\frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_1)} \right)$$

und somit sind die Winkel bewahrt. □

Beispiel:

$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = z^2$ holomorph mit $f'(z) = 2z \neq 0 \implies f$ winkeltreu. Seien nun $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Geraden $x = a, y = b$ schneiden sich senkrecht $\xRightarrow{f \text{ winkeltreu}}$ ihre Bildkurven unter f schneiden sich senkrecht.

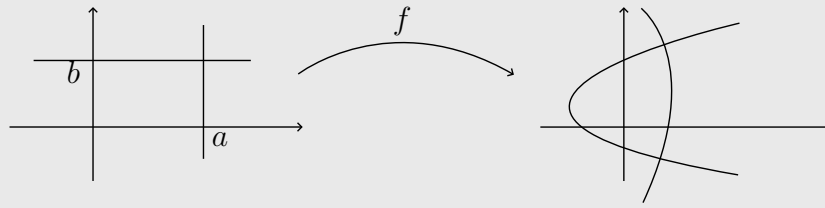


Abbildung 1.7: Winkeltreue

Direkte Verifizierung $u = \Re f = x^2 - y^2, v = \Im f = 2xy$.

- Bild von $x = a$ ($(x, y) = (a, y), y \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} u = a^2 - y^2 \\ v = 2ay \end{cases} \xrightarrow{y=\frac{v}{2}a} u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2} =: \varphi(v) \text{ PARABEL } P(a)$$

- Analog ist das Bild von $y = b$ die Parabel $\tilde{P}(b): u = \frac{v^2}{4b^2} - b^2 =: \psi(v)$

Schnittpunkte: $P(a) \cap \tilde{P}(b) = \{(a^2 - b^2, \pm 2ab)\}$. Es gilt $\varphi'(b) = -\frac{v}{2a^2}, \psi'(v) = \frac{v}{2b^2}$
 $\implies \varphi'(2ab) \cdot \psi'(2ab) = \frac{-2ab}{2a^2} \cdot \frac{2ab}{b^2} = -1 = \varphi'(-2ab) \cdot \psi'(-2ab)$. $\implies P(a)$ und $\tilde{P}(b)$ schneiden sich senkrecht (Produkt der Steigungen ist -1). Erweitere jetzt f zu $\mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ und betrachte $I_+ = \{z = iy | y \geq 0\}$. Dann gilt $I_+ \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}$ und $\angle(\mathbb{R}_+, I_+) = \frac{\pi}{2}$, aber $\angle(f(\mathbb{R}_+), f(I_+)) = \angle(R_+, R_-) = \pi \neq \frac{\pi}{2}$. Erklärung: $f'(0) = 0$.

Bemerkung:

Falls $f'(z_0) = 0$ folgt nicht, dass f Winkeltreu ist.

1.6 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen/-reihen

Definition:

Sei $f_n: A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n \geq 0}$ KONVERGIERT GLEICHMÄSSIG gegen $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \forall n \geq N, \forall z \in A$

Bemerkung:

$$f_n \xrightarrow[\text{auf } A]{\text{gleichmäßig}} f \iff \|f_n - f\|_\infty := \sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Satz 1.6:

Sei $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $(f_n)_{n \geq 0}$ ist gleichmäßig konvergent
2. $(f_n)_{n \geq 0}$ ist eine Cauchy Folge bezüglich der „ ∞ “-Norm, das heißt $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N.$$

Beweis. Analog zum reellen Fall. □

Definition:

Sei $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig, wenn die Folge ihrer Partialsummen $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n \geq 0}$ gleichmäßig konvergiert.

Satz 1.7 (Kriterium von Cauchy):

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig auf $A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\underbrace{|f_{m+1}(z) + \cdots + f_n(z)|}_{(S_n - S_m)(z)} < \varepsilon \quad \forall n > m \geq N \text{ und } \forall z \in A.$$

Beweis. Folgt direkt aus [Theorem 1.6](#) auf die Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ angewendet. □

Satz 1.8 (Majorantenkriterium von Weierstraß):

Sei $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge sodass $\exists M_n \geq 0$ mit

$$\|f_n\|_\infty := \sup_{z \in A} |f_n(z)| \leq M_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Falls $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent.

Beweis. Mittels **Kriterium von Cauchy**: Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| \sum_{k=m+1}^n f_k(z) \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |f_k(z)| \leq \sum_{k=m+1}^n M_k < \varepsilon, \quad \forall n > m \geq N \text{ und } \forall z \in A.$$

□

Beispiel:

- $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ konvergiert gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

$$\overline{D_r(0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\} \quad (0 \leq r < 1)$$

Es gilt $|z^n| = |z|^n \leq r^n \forall z \in \overline{D_r(0)}$. $\sum_{n \geq 0} r^n$ konvergent (geometrische Reihe $r \in [0, 1)$) $\xrightarrow{1.8} \sum_{n \geq 0} z^n$ gleichmäßig konvergent auf $\overline{D_r(0)}$. Da für jede kompakte Teilmenge $K \subset D_1(0) \exists r \in [0, 1)$ mit $K \subset \overline{D_r(0)}$ folgt nun die Behauptung.

- Für $|z| \geq 1$ gilt $|z^n| = |z|^n \geq 1 \implies |z^n| \not\rightarrow 0 \implies$ Reihe divergiert (punktweise!).

1.7 Potenzreihen

Definition:

Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ fix. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

POTENZREIHE mit Entwicklungspunkt z_0 .

Satz 1.9 (Satz von Cauchy-Hadamard):

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe. Setze

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

mit der Konvention $R = 0$ falls $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ und $R = \infty$ falls $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Dann gilt:

1. Die Potenzreihe konvergiert *absolut* auf $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ und *gleichmäßig* auf $\overline{D_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ für $0 \leq r < R$.
2. Die Potenzreihe ist divergent $\forall z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > R$.

R heißt KONVERGENZRADIUS der Potenzreihe.

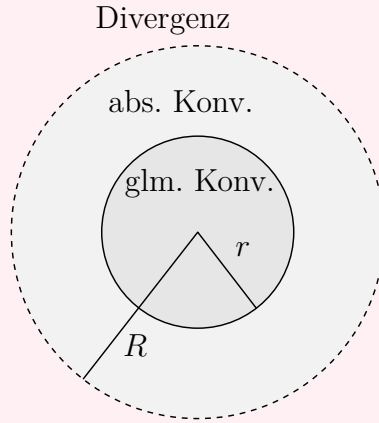


Abbildung 1.8: Konvergenzradien

Beweis. 1. Falls $R = 0$ nichts zu zeigen. Sei nun $R > 0$ und $0 \leq r < R$. Dann $\exists \delta > 0$: $0 \leq r < r + \delta < R$. Es gilt

$$\frac{1}{r + \delta} > \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

und somit existiert $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n|} &< \frac{1}{r + \delta} \quad \forall n \geq N \\ \iff |a_n| &< \frac{1}{(r + \delta)^n} \quad \forall n \geq N. \end{aligned}$$

Für $|z - z_0| \leq r$ und $n \geq N$ gilt

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n| |z - z_0|^n \leq \left(\frac{r}{r + \delta} \right)^n \quad (1.6)$$

Die geometrische Reihe $\sum \left(\frac{r}{r + \delta} \right)^n$ konvergiert. Dann folgt aus dem **Majorantenkriterium von Weierstraß**, dass $\sum a_n(z - z_0)^n$ gleichmäßig auf $\overline{D_r(z_0)}$ konvergiert. Zusätzlich ergibt **Gleichung (1.6)** die absolute Konvergenz der Potenzreihe auf $\overline{D_r(z_0)}$. Da $0 \leq r < R$ beliebig, folgt absolute Konvergenz auf $D_R(z_0)$.

2. Falls $R = +\infty$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $R < \infty$ und z mit $|z - z_0| > R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Dann gilt $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z - z_0|}$ und es folgt $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z - z_0|}$ für unendlich viele $n \iff \underbrace{|a_n| |z - z_0|^n}_{\not\rightarrow 0} > 1$ für unendlich viele $n \rightarrow$ Reihe divergiert. $\square$

Bemerkung:

Bezüglich des Konvergenzverhaltens in Randpunkten, das heißt $z \in \mathbb{C}$: $|z - z_0| = R$, kann man keine allgemeine Aussage machen!

Beispiel:

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat den Konvergenzradius $R = \frac{1}{\limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}} = 1$, weil $\sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1$.

Randkreis $|z| = 1$: $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty \implies$ die Potenzreihe ist überall auf $|z| = 1$ konvergent.

- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ hat $R = \frac{1}{\limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = 1$.

Randkreis $|z| = 1$: $z = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonische Reihe, divergiert. $z = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergent (wegen Leibnizkriterium).

Bemerkung: man kann zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ in allen Punkten mit $|z| = 1$ außer für $z = 1$ konvergent ist (freiwillige Übung 23).

- c) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat $R = 1$.

Randkreis $|z| = 1$ $|z^n| = |z|^n = 1 \not\rightarrow 0 \implies$ auf dem Randkreis überall divergent.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ hat $R = \frac{1}{\limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}} = \frac{1}{\lim \frac{1}{n}} = +\infty$

3. Um den Konvergenzradius von zum Beispiel $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ zu berechnen, ist es praktischer den folgenden Satz zu verwenden:

Satz 1.10:

Sei $a_n \neq 0 (n \in \mathbb{N})$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Falls $L := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ existiert in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, dann gilt $R = L$.

Beweis. Sei $z \neq z_0$. Das Quotientenkriterium für $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ ergibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (z - z_0)^{n+1}}{a_n (z - z_0)^n} \right| = |z - z_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{L} |z - z_0|.$$

Falls $L = 0$ divergiert die Reihe $\forall z \neq z_0$. Falls $L > 0$ ist die Reihe für $|z - z_0| < L$ konvergent, und für $|z - z_0| > L$ divergent. Also gilt $R = L$. $\square$

Beispiel (Fortsetzung):

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty.$$

Bemerkung:

Aus dem vorherigen Beispiel und dem **Satz von Cauchy-Hadamard** folgt nun, dass

$$0 \leq \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Satz 1.11:

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \neq 0$. Dann ist f holomorph auf $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ und es gilt

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \quad (1.7)$$

wobei die „gliedweise“ differenzierte Reihe wieder den Konvergenzradius R hat.

Später werden wir auch einen 2. Beweis besprechen der eleganter ist (siehe 4).

Beweis (1). Die Reihe in **Gleichung (1.7)** hat den gleichen Konvergenzradius wie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^n$ und zwar

$$R' = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n |a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

OBdA nehmen wir jetzt an, dass $z_0 = 0$. Sei $0 < r < R$ und $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z|, |w| < r$. Für

$z \neq w$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a_n |z^n - w^n|}{z - w} - n a_n w^{n-1} \right) \\
&= \sum_{n \geq 2} a_n (z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots + zw^{n-2} + w^{n-1} - n w^{n-1}) \\
&= \sum_{n \geq 2} a_n ((z^{n-1} - w^{n-1}) + (z^{n-2} \cdot w - w^{n-1}) + \\
&\quad \dots + (zw^{n-2} - w^{n-1}) + 0) \\
&= \sum_{n \geq 2} a_n ((z^{n-1} - w^{n-1}) + w(z^{n-2} - w^{n-2}) \\
&\quad + w^2(z^{n-3} - w^{n-3}) + \dots + w^{n-2}(z - w)) \\
&= \sum_{n \geq 2} a_n (z - w) (z^{n-2} + z^{n-3}w + \dots + w^{n-2}) + \\
&\quad w(z^{n-3} + z^{n-4}w + \dots + w^{n-3}) + \dots + \\
&\quad w^k(z^{n-2-k} + z^{n-3-k}w + \dots + w^{n-2-k}) + \dots + w^{n-2}).
\end{aligned}$$

Hier haben wir die Formel

$$z^M - w^M = (z - w)(z^{M-1} + z^{M-2}w + z^{M-3}w^2 + \dots + zw^{M-2} + w^{M-1})$$

für $M \in \mathbb{N}$ mehrmals verwendet. Das Monom $z^{n-2-k} \cdot w^k$, $0 \leq k \leq n-2$, kommt genau einmal in jedem von den ersten $k+1$ Summanden $(z^{n-2} + z^{n-3}w + \dots + w^{n-2})$, $w(z^{n-3} + \dots + w^{n-3})$, $\dots$, $w^k(z^{n-2-k} + \dots + w^{n-2-k})$ vor. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - \sum_{n \geq 1} n a_n w^{n-1} \right| &= \left| (z - w) \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) z^{n-2-k} w^k \right| \quad (1.8) \\
&\leq |z - w| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) r^{n-2-k} \cdot r^k \\
&= |z - w| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \underbrace{\frac{(n-1)n}{n} r^{n-2}}_{=: c(r)} \\
&= c(r) |z - w| \rightarrow 0, \text{ wenn } z \rightarrow w
\end{aligned}$$

Die Reihe $c(r) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} |a_n| r^{n-2}$ ist wegen dem Wurzelkriterium konvergent:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n(n-1)}{2}}}_{\rightarrow 1} \sqrt[n]{|a_n|} \underbrace{\sqrt[n]{r^{n-2}}}_{\rightarrow r} = \frac{r}{R} < 1.$$

Aus [Gleichung \(1.8\)](#) folgt nun, dass f differenzierbar in w ist und [Gleichung \(1.7\)](#) gilt, da $0 < r < R$ beliebig gewählt war gilt die Behauptung für alle w mit $|w| < R$. $\square$

1.7.1 Elementare Funktionen

Definition:

$\exp(z) = e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ heißt die komplexe EXPONENTIALFUNKTION ($z \in \mathbb{C}$).

Das vorherige Beispiel zeigt, dass die obige Reihe den Konvergenzradius ∞ hat. Aus **Theorem 1.11** folgt nun, dass $z \mapsto e^z$ holomorph ist mit

$$(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \stackrel{k:=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

Also $(e^z)' = e^z, z \in \mathbb{C}$.

Satz 1.12:

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

Beweis. Sei $w \in \mathbb{C}$ fest und betrachte $g(z) = e^{-z}e^{z+w}, z \in \mathbb{C}$. Dann ist g holomorph (Produkt und Zusammensetzung holomorpher Funktionen) mit

$$g'(z) = (e^{-z})'e^{z+w} + e^{-z}(e^{z+w})' = -e^{-z}e^{z+w} + e^{-z}e^{z+w} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Aus **Theorem 1.3** folgt nun ($g = u + iv$)

$$\begin{aligned} 0 &= g'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = v_y(z) - iu_y(z) \\ \implies u_x &= v_x = u_y = v_y = 0 \implies u, v \text{ konstant auf } \mathbb{C} \\ &\implies g \text{ konstant auf } \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$g(z) = g(0) = e^w \implies e^{-z}e^{z+w} = e^w \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (1.9)$$

Für $w = 0$ in **Gleichung (1.9)** erhalten wir $g(z) = e^{-z}e^z = e^0 = 1$ und somit ist $(e^{-z})^{-1} = e^z$. Verwenden wir die letzte Gleichung in **Gleichung (1.9)** um $e^{z+w} = e^ze^w$ zu erhalten. $\square$

Bemerkung:

Insbesondere folgt von oben, dass $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

Definition:

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{und} \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

Bemerkung:

Beide Reihen haben den Konvergenzradius $+\infty$.

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[2n+1]{\frac{1}{(2n+1)!}} \leq \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

Satz (Eigenschaften):

1. $\cos z + i \sin z = e^{iz}$,
2. $\cos(-z) = \cos z$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$,
3. $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$,
4. $(\sin z)' = \cos z$ und $(\cos z)' = -\sin z$.

Beweis. 1.

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \cdot z^n}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^{2j} \cdot z^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^{2j+1}}{(2j+1)!} z^{2j+1} \\ (i^{2j} &= (i^2)^j = (-1)^j, \quad i^{2j+1} = i^{2j} \cdot i = (-1)^j \cdot i) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} z^{2j} + i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} z^{2j+1} = \cos z + i \sin z. \end{aligned}$$

2. folgt direkt aus der Definition

3. folgt direkt aus **Punkte 1 und 2**

4. gliedweise differenzieren. □

Bemerkung:

Für $z = x + iy (x, y \in \mathbb{R})$ gilt $e^z = e^{x+iy} \stackrel{1.12}{=} e^x e^{iy} \stackrel{1}{=} e^x (\cos y + i \sin y) \implies |e^z| = |e^x| \underbrace{|\cos y + i \sin y|}_{=1} = e^x = e^{\Re z}$. Ein Argument von e^z ist $y = \Im z$.

Bemerkung:

1. Es gelten die Additionsformeln

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$$

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

mit der Konsequenz $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$. Beweis: direkte Rechnung, die **Punkt 3** verwendet.

2.

$$\sin z = 0 \iff z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos z = 0 \iff z = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis ist Übung. Hinweis: Die Nullstellen von $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind aus der reellen Analysis bekannt.

- $\sin z = 0 \iff \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 \dots$
usw.
- $\cos z = 0 \iff \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 0 \iff e^{iz} = -e^{-iz} \iff e^{2iz} = -1 = \cos \pi + i \sin \pi \dots$ usw.

Definition:

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, z \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}, z \neq k\pi$$

$$(\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z}, (\cot z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$$

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \text{ und } \sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

Bemerkung:

Es gelten: $\cosh z = \cos(iz)$ und $\sinh(z) = \frac{1}{i} \sin(iz)$.

Bemerkung:

Für $w = x + iy (x, y \in \mathbb{R})$ gilt $e^w = e^{x+iy} \stackrel{1.12}{=} e^x e^{iy} = \underbrace{e^x}_{>0} \cdot (\cos y + i \sin y) \implies$
 $|e^w| = e^x = e^{\Re w}$ und ein Argument von e^w ist $y = \Im w$.

1.7.2 Der komplexe Logarithmus

Gegeben $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ möchten wir

$$e^w = z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}, \quad (1.10)$$

$-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$ lösen. Sei $w = x + iy (x, y \in \mathbb{R})$. Aus der obigen Bemerkung folgt $|e^w| = e^{\Re w} = e^x$ und ein Argument von e^w ist $\Im w = y$. Dann ist Gleichung (1.10) äquivalent zu

$$|z| = e^x \iff x = \log |z|$$

und

$$y = \operatorname{Arg} z + n2\pi \ (n \in \mathbb{Z}),$$

das heißt

$$\log z := w = \log |z| + i(\operatorname{Arg} z + n2\pi) \ (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist $\log$ eine mehrwertige Funktion (keine Funktion im üblichen Sinne). Insbesondere gilt

$$\log 1 = i2\pi n \ (n \in \mathbb{Z}), \text{ das heißt } e^w = 1 \iff w = i2\pi n \ (n \in \mathbb{Z}).$$

Sei nun $\alpha \in \mathbb{R}$ fest. Dann gilt: $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \exists! n \in \mathbb{Z}$ sodass

$$\underbrace{\operatorname{Arg} z + 2n\pi}_{=: \arg_\alpha z} \in (\alpha - 2\pi, \alpha].$$

Wir haben diesen Repräsentant vom Argument $\arg_\alpha$ genannt.

Bemerkung:

$\exp$ bildet jeden horizontalen Streifen mit Breite 2π : $\{z \in \mathbb{C} : \alpha - 2\pi < \Im z \leq \alpha\}$ bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ab.

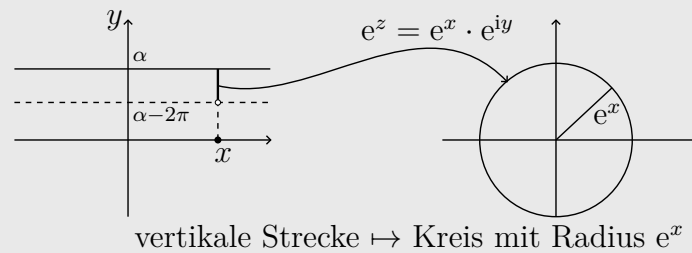


Abbildung 1.9: bijektive Abbildung auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Um eine invertierbare Exponentialfunktion mit *stetiger Inverse* zu erhalten, müssen wir den Definitionsbereich einschränken. Seien

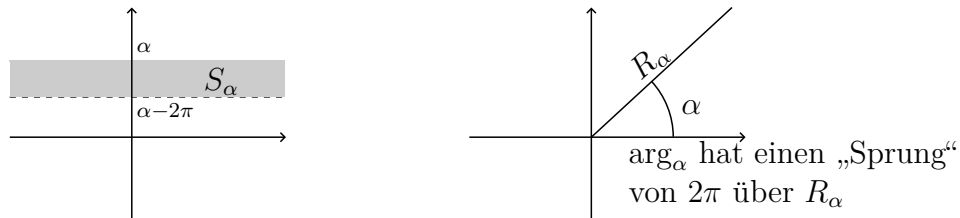


Abbildung 1.10: S_α und R_α

$$S_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : \alpha - 2\pi < \operatorname{Im} z < \alpha\},$$

$$R_\alpha := \{z = re^{i\alpha} : r \geq 0\},$$

$$\mathbb{C}_\alpha := \mathbb{C} \setminus R_\alpha.$$

$\exp: S_\alpha \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ ist bijektiv mit stetiger Inverse

$$\log_\alpha z = \log |z| + i \arg_\alpha z, \quad z \in \mathbb{C}_\alpha.$$

Bemerkung:

Wir haben R_α ausgeschlossen, weil $\arg_\alpha(z)$ nicht stetig auf R_α ist!

Bemerkung:

$\exp$ ist auf jedem Streifen mit vertikaler Breite 2π nach $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bijektiv. Wenn aber der Streifen nicht horizontal ist, dann ist das Bilde des Randes eine Spirale in $\mathbb{C}$, also zu kompliziert um eine „einfache“ Inverse zu ergeben.

Bemerkung:

Es gilt

$$e^{\log_\alpha z} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}_\alpha,$$

aber

$$\log_\alpha e^z = z \iff z \in S_\alpha.$$

Hauptzweig des Logarithmus

Sei $\alpha = \pi$ und $\text{Log} := \log_\pi$, $\text{Log}: \mathbb{C}^- \rightarrow S_\pi$. $\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg } z$, $-\pi < \text{Arg } z < \pi$.

Satz 1.13:

$\text{Log}: \mathbb{C}^- \rightarrow S_\pi$ ist holomorph mit $(\text{Log})'(z) = \frac{1}{z}$

Beweis. $\exp: S_\pi \rightarrow \mathbb{C}^-$ ist holomorph, bijektiv mit inverse $\text{Log}: \mathbb{C}^- \rightarrow S_\pi$. Sei $a \in \mathbb{C}^-$. Da Log stetig ist, gilt $\text{Log } z \rightarrow \text{Log } a$ für $z \rightarrow a$, und somit gilt

$$(\text{Log})'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\text{Log } z - \text{Log } a}{z - a} \stackrel{w = \text{Log } z}{=} \lim_{b = \text{Log } a} \frac{w - b}{e^w - e^b} = \lim_{w \rightarrow b} \frac{1}{\frac{e^w - e^b}{w - b}} = \frac{1}{(\exp)'(b)} = \frac{1}{e^b} = \frac{1}{a}$$

□

Beispiel:

$$\text{Log}(2i) = \log |2i| + i \text{Arg}(2i) = \log 2 + i \frac{\pi}{2}$$

Achtung: die Rechenregeln für den reellen Logarithmus sind nicht immer vom komplexen Logarithmus übernommen. Zum Beispiel

$$\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2$$

$$\iff \log |z_1 z_2| + i \text{Arg}(z_1 z_2) = \log |z_1| + i \text{Arg } z_1 + \log |z_2| + i \text{Arg } z_2$$

$$\iff \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$$

$$\iff \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 \in (-\pi, \pi)$$

Beispiel:

$$z_1 = z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \operatorname{Log} z_1 = \operatorname{Log} z_2 = \operatorname{Log} \left| e^{i\frac{2\pi}{3}} \right| + i \operatorname{Arg} \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right) = i\frac{2\pi}{3},$$

also

$$\operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 = i\frac{4\pi}{3} \neq \operatorname{Log}(z_1 z_2) = i \operatorname{Arg} \left(e^{i\frac{4\pi}{3}} \right) = -\frac{2\pi}{3}i.$$

Definition (Potenzen):

Für $z \in \mathbb{C}^\times$ und $a \in \mathbb{C}$ definiere „den Hauptzweig von z^a “ als

$$z^a := \exp(a \operatorname{Log} z).$$

Aus der Kettenregel folgt

$$(z^a)' = \exp(a \operatorname{Log} z) \frac{a}{z} = e^{a \operatorname{Log} z} \frac{a}{e^{\operatorname{Log} z}} \stackrel{1.12}{=} e^{a \operatorname{Log} z - \operatorname{Log} z} a = e^{(a-1) \operatorname{Log} z} a = a z^{a-1}.$$

Bemerkung:

Im Allgemeinen gilt $(z^w)^\lambda = z^{w\lambda}$ *nicht!* Sei $z = e, w = 2\pi i, \lambda = \frac{\alpha}{2\pi i}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann ist $(z^w)^\lambda = (e^{2\pi i})^\lambda = 1^\lambda = e^{\lambda \operatorname{Log} 1} = e^0 = 1$, aber $z^{w\lambda} = e^\alpha$ beliebig in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Beispiel:

$$i^i = e^{i \operatorname{Log} i} = e^{i(\log|i| + i \operatorname{Arg} i)} = e^{i(0 + i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

2 Der Cauchy'sche Integralsatz

2.1 Kurvenintegrale

Definition:

- Eine stetige Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt WEG ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$).
- Notation: $\gamma^* := \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$ heißt das BILD von γ .
- Falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ heißt γ ein GESCHLOSSENER Weg
- Ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt PFAD (das heißt $\exists a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$ mit $\gamma|_{[s_{j-1}, s_j]}$ stetig differenzierbar $\forall j \in \{1, \dots, n\}$).

Beispiel:

1. $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{it}$ der positiv orientierte Einheitskreis.

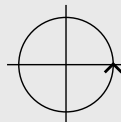


Abbildung 2.1: Einheitskreis

2. Verbindungsstrecke zwischen $z, w \in \mathbb{C}$. $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = (1-t)z + tw = z + (w-z)t$. Notation: $[z, w]$.

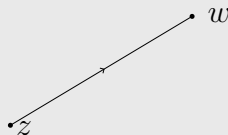


Abbildung 2.2: $[z, w]$

3. Streckenzug von 0 über $2, 2i$ nach 0, $\gamma: [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 + (2i - 2)(t - 1) & 1 \leq t \leq 2 \\ 2i(3 - t) & 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

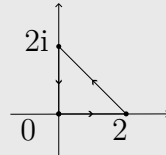


Abbildung 2.3: Streckenzug

Definition:

Sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\Re g, \Im g$ Riemann integrierbar auf $[a, b]$. Wir definieren

$$\int_a^b g dt = \int_a^b \Re g dt + i \int_a^b \Im g dt.$$

Definition:

Sei $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ Pfad. Dann heißt

$$\int_{\gamma} f dz := \int_a^b f \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t) dt$$

das KURVENINTEGRAL von f längs γ .

Definition:

Zwei Pfade $\gamma_1: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißen ÄQUIVALENT, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi: [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ mit $\varphi' > 0$ und $\varphi(a_1) = a, \varphi(b_1) = b$ gibt, sodass $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$.

Bemerkung:

Aus $\varphi: [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar mit $\varphi' > 0$ und $\varphi(a_1) = a, \varphi(b_1) = b$ folgt, dass φ bijektiv ist mit φ^{-1} stetig differenzierbar. Somit führt die obige Definition in der Tat eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Pfade in $\mathbb{C}$ ein.

Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ und γ, γ_1 äquivalente Pfade in U . Für jede stetige Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(\varphi(t))) \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ \text{Substitution: } &= \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_{\gamma} f dz \end{aligned}$$

Man sagt, dass das Kurvenintegral unabhängig von der Parametrisierung ist.

Bemerkung:

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Pfad ($a < b$). Für jedes Intervall $[c, d] \subset \mathbb{R}$ mit $c < d$ existiert ein Pfad $\gamma_1: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$, der zu γ äquivalent ist.

Beweis. Sei $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b], \varphi(t) = At + B$, wobei A, B so gewählt sind, dass $\varphi(c) = a, \varphi(d) = b$. Eine kurze Rechnung ergibt: $A = \frac{b-a}{d-c}, B = \frac{ad-bc}{d-c}$. Dann ist $\gamma_1 := \gamma \circ \varphi: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ äquivalent zu γ . $\square$

Insbesondere kann man oBdA nur Pfade $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten.

Definition:

Komposition Sind $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ Pfade mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, so ist auch $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2: [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$, wobei $\gamma|_{[a,b]} = \gamma_1$ und $\gamma|_{[b,c]} = \gamma_2$, ein Pfad in $\mathbb{C}$ mit

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz, \quad \forall f: \gamma^* \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}$$

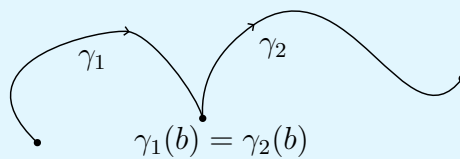


Abbildung 2.4: Komposition zweier Pfade

Inverser Pfad Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Pfad. Der zu γ inverse Pfad γ^- ist durch

$$\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t), \quad a \leq t \leq b$$

gegeben. Dann gilt $\gamma^* = (\gamma^-)^*$ und

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(a + b - t))(-\gamma'(a + b - t)) dt$$

$$\text{Substitution: } = - \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s) ds = - \int_{\gamma} f dz$$

Länge eines Pfades Definiere für $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$:

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Lemma 2.1:

Sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\Re g, \Im g$ Riemann integrierbar auf $[a, b]$. Dann gilt

$$\left| \int_a^b \underbrace{g}_{u+iv} dt \right| \leq \int_a^b \underbrace{|g|}_{\sqrt{u^2+v^2}} dt.$$

Beweis. Sei $\theta \in (-\pi, \pi]$, sodass $\int_a^b g dt = \left| \int_a^b g dt \right| e^{i\theta}$, dann gilt

$$\left| \int_a^b g dt \right| = e^{-i\theta} \int_a^b g dt = \underbrace{\int_a^b g e^{-i\theta} dt}_{\in \mathbb{R}} = \Re \left(\int_a^b g e^{-i\theta} dt \right)$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} \int_a^b \Re(g e^{-i\theta}) dt \leq \int_a^b |g e^{-i\theta}| dt = \int_a^b |g| dt \quad \square$$

$|e^{-i\theta}|=1$

Lemma 2.2:

Falls $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ Pfad, dann gilt

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq L(\gamma) \max_{z \in \gamma^*} |f(z)|$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f dz \right| &= \left| \int_a^b f \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt \right| \stackrel{2.1}{\leq} \int_a^b |f \circ \gamma(t)| |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt \max_{z \in \gamma^*} |f(z)| = L(\gamma) \max_{z \in \gamma^*} |f(z)| \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.3:

Sei $a \in \mathbb{C}, r > 0$

1. $\gamma(t) = a + r \cdot e^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Dann ist $\gamma'(t) = r \cdot ie^{it}$.

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + re^{it} - a} \cdot ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i$$

2. γ wie in **Punkt 1** und $a = 0$.

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} \overline{re^{it}} ire^{it} dt = r^2 \cdot i \int_0^{2\pi} e^{-it} e^{it} dt = 2\pi i r^2$$

3. $[z_0, z_1], \gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0), \gamma'(t) = z_1 - z_0$.

$$\begin{aligned} \int_{[z_0, z_1]} z dz &= \int_0^1 (z_0 + t(z_1 - z_0))(z_1 - z_0) dt \\ &= z_0(z_1 - z_0) + (z_1 - z_0)^2 \int_0^1 t dt \\ &= z_0 z_1 - z_0^2 + \frac{1}{2} (z_1 - z_0)^2 \\ &= \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \end{aligned}$$

2.2 Stammfunktionen

Definition:

Eine stetige Funktion $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt eine STAMMFUNKTION auf U , wenn $\exists F: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $F' = f$ auf U . F heißt STAMMFUNKTION von f .

Bemerkung:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, F_1, F_2 Stammfunktionen für $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. Dann $\exists C \in \mathbb{C}$ mit $F_1 = F_2 + C$.

Beweis. Sei $F_1 - F_2 = u + iv$. Dann gilt

$$0 = F_1' - F_2' = (F_1 - F_2)' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

$\implies u_x = u_y = v_x = v_y = 0 \implies u, v$ konstant, da G Gebiet $\implies F_1 - F_2$ konstant. $\square$

Satz 2.4:

Sei $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ Pfad. Falls f eine Stammfunktion F auf U hat, dann gilt

$$\int_{\gamma} f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Beweis. γ Pfad $\implies \exists a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ mit $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \underbrace{F' \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t)}_{\frac{\partial}{\partial t} F \circ \gamma(t)} dt \\ &= \sum_{k=1}^n F(\gamma(t_k)) - F(\gamma(t_{k-1})) = F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_0)) \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 2.5:

Sei f wie im [Theorem 2.4](#). Dann gilt

1. $\int_{\gamma} f dz$ hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab.
2. $\forall \gamma$ geschlossener Pfad gilt $\int_{\gamma} f dz = 0$.

Beispiel:

1. $f(z) = z^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ hat die Stammfunktion $\frac{z^{n+1}}{n+1} \xrightarrow{2.4} \forall \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Pfad gilt

$$\int_{\gamma} f dz = \frac{(\gamma(b))^{n+1} - (\gamma(a))^{n+1}}{n+1}$$

2. $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ geschlossener Pfad $\xrightarrow{1} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0 \implies \frac{1}{z}$ hat keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Immerhin ist $\text{Log } z$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Für geschlossene Pfade σ in $\mathbb{C}^-$ gilt $\int_{\sigma} \frac{1}{z} dz = 0$.

Satz 2.6:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt: f hat eine Stammfunktion auf $G \iff$ für jeden geschlossenen Pfad γ in G gilt $\int_{\gamma} f dz = 0$.

Beweis. $\implies$: Klar aus Theorem 2.5.

$\impliedby$: Sei $a \in G$ fix. Für $z \in G$ beliebig wähle einen Pfad γ_z von a nach z (existiert weil G Gebiet). Setze $F(z) := \int_{\gamma_z} f dw$.

Behauptung: F wohldefiniert. Sei dafür $\tilde{\gamma}_z$ ein anderer Pfad in G von a nach z und betrachte den geschlossenen Pfad $\gamma_z + \tilde{\gamma}_z^{-1}$. Nach Voraussetzung ist $0 = \int_{\gamma_z + \tilde{\gamma}_z^{-1}} f dw = \int_{\gamma_z} f dw - \int_{\tilde{\gamma}_z} f dw \implies$ Behauptung.

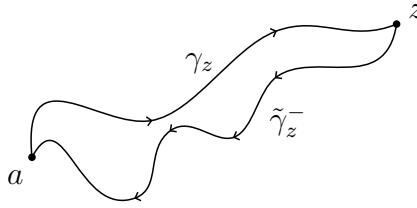


Abbildung 2.5: Konstruktion geschlossener Pfad

Sei nun $z_0 \in G$ und $r > 0$ mit $D_r(z_0) \subset G$. Für $z \in D_r(z_0)$ gilt $[z_0, z] \subset G$. Falls γ_{z_0} ein Pfad in G von a nach z_0 ist, dann ist $\gamma_z = \gamma_{z_0} + [z_0, z]$ ein Pfad in G von a nach z .

¹Falls $\gamma_2: [a, b] \rightarrow C$ dürfen wir oBdA annehmen, dass $\tilde{\gamma}_z: [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$. Sonst ersetzen wir $\tilde{\gamma}_z$ durch einen äquivalenten Pfad: falls $\tilde{\gamma}_z: [\beta, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\beta \neq b$, sei $\varphi: [b, c] \rightarrow [\beta, \delta]$, $\varphi(t) = At + B$, wobei A, B so gewählt sind, dass $\varphi(b) = \beta, \varphi(c) = \delta$. Ersetze nun $\tilde{\gamma}_z$ durch $\tilde{\gamma}_z \circ \varphi: [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$.

z . Somit gilt

$$\begin{aligned}\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \left(\int_{\gamma_{z_0} + [z_0, z]} f dw - \int_{\gamma_{z_0}} f dw \right) \\ &= \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} f dw \\ &= \frac{1}{z - z_0} \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) \cdot (z - z_0) dt \xrightarrow{z \rightarrow z_0} f(z_0)\end{aligned}$$

$\implies F'(z_0) = f(z_0)$ und $z_0 \in G$ beliebig. $\square$

Für „schöne“ Gebiete kann man die Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion im obigen **Theorem 2.6** abschwächen. Da diese Bedingung in der Praxis schwierig zu überprüfen ist, wäre es hilfreich die zu einfachen Wegen einzuschränken, wie zum Beispiel entlang der Seiten jedes Dreiecks in G . Im Beweis bräuchten wir, dass die Strecke zwischen einem festen Punkt und allen anderen Punkten im Gebiet enthalten ist.

Definition:

Eine offene Menge $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **STERNGEBIET** wenn ein Punkt $a \in G$ (Zentrum) existiert, sodass $\forall z \in G: [a, z] \subset G$.

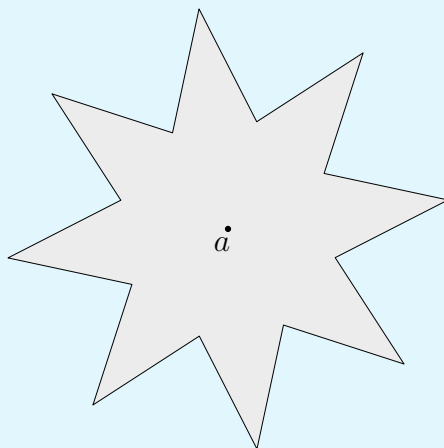


Abbildung 2.6: Beispiel für ein Sterngebiet

Bemerkung:

Eine konvexe, offene Menge ist eine Sterngebiet.

Satz 2.7:

Sei G ein Sterngebiet in $\mathbb{C}$ und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Wenn für jedes Dreieck $\Delta \subset G$

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

dann besitzt f eine Stammfunktion auf G .

Bemerkung:

Da G ein Sterngebiet ist, gilt: $\Delta \subset G \iff \partial\Delta \subset G$.

Beweis (*Theorem 2.7*). Sei a Zentrum von G und setze

$$F(z) := \int_{[a,z]} f dw, z \in G.$$

Sei $z_0 \in G$ beliebig. Für z hinreichend nahe an z_0 gilt $[z_0, z] \subset G$. $\Delta =$ Dreieck mit Eckpunkten a, z_0, z . Laut Voraussetzung ist

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Delta} f(w)dw \\ \iff 0 &= \int_{[a,z_0]} f dw + \int_{[z_0,z]} f dw - \int_{[a,z]} f dw \\ \implies \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} f dw \xrightarrow[z \rightarrow z_0]{f \text{ stetig in } z_0} f(z_0) \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung:

Für allgemeine Gebiete G gilt die Aussage vom *Theorem 2.7* zumindest in jeder sternförmigen Umgebung (z.B. Kreisscheiben um z) eines beliebigen Punktes $z \in G$.

Satz 2.8:

Sei γ Pfad in $\mathbb{C}$ und $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen auf γ^* . Falls $(f_n)_n$ gleichmäßig auf γ^* gegen f konvergiert, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n dz = \int_{\gamma} \lim f_n dz = \int_{\gamma} f dz$$

Beweis.

$$\left| \int_{\gamma} f_n dz - \int_{\gamma} f dz \right| = \left| \int_{\gamma} f_n - f dz \right| \stackrel{2.2}{\leq} L(\gamma) \overbrace{\max_{z \in \gamma^*} |(f_n - f)(z)|}^{n \rightarrow \infty \atop \rightarrow 0} \quad \square$$

Korollar:

$\sum_{n \geq 0} f_n$ gleichmäßig konvergent in $\gamma^* \implies$

$$\int_{\gamma} \sum_{n \geq 0} f_n dz = \sum_{n \geq 0} \int_{\gamma} f_n dz$$

Satz (Theorem 1.11 „revisited“):

Sei $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Dann ist F auf $D_R(z_0)$ holomorph mit

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \quad (2.1)$$

Beweis (2). Die Reihe in Gleichung (2.1) hat den gleichen Konvergenzradius wie $\sum n a_n (z - z_0)^n$ und zwar

$$R' = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n |a_n|}} = \frac{1}{\limsup \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\rightarrow 1} \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

OBdA $z_0 = 0$. Setze $Q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Für jeden geschlossenen Pfad γ in $D_R(0)$ ist $\gamma^* \subset D_R(0)$ kompakt und es gilt

$$\int_{\gamma} Q dz = \int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} dz \stackrel{\text{gleichmäßige Konvergenz}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \underbrace{\int_{\gamma} z^{n-1} dz}_{=0} \stackrel{2.5}{=} 0,$$

weil $\frac{z^n}{n}$ Stammfunktion für z^{n-1} ist $\forall n \geq 1$. Laut Theorem 2.6 hat Q eine Stammfunktion auf $D_R(0)$, zum Beispiel

$$\int_{[0,z]} Q dw = \int_{[0,z]} \sum_{n \geq 1} \dots dw \stackrel{\text{gleichmäßige Konvergenz}}{=} \sum_{n \geq 1} n a_n \int_{[0,z]} w^{n-1} dw = \sum_{n \geq 1} n a_n \frac{z^n}{n} = F(z) - a_0$$

$$\implies F' = Q. \quad \square$$

Korollar:

Sei F wie im [Theorem 1.11](#). Dann gilt

$$F^{(k)}(z) = \sum n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (z-z_0)^{n-k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Für $z = z_0$ oben erhalten wir $F^{(k)}(z_0) = k! \cdot a_k$.

$$a_k = \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!}$$

Für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ definieren wir die Äquivalenzrelation $p, q \in U, p \sim q \iff \exists \text{ Weg in } U \text{ von } p \text{ nach } q$. Die Äquivalenzklassen, die $\sim$ ergibt, nennen wir die **ZUSAMMENHANGSKOMPONENTEN** von U .

Satz (Jordan'scher Kurvensatz):

Sei γ ein geschlossener, doppelpunktfreier Weg in $\mathbb{C}$. Dann hat die Menge $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ genau zwei Zusammenhangskomponenten: eine beschränkte (das Innere von γ^*) und eine unbeschränkte (das Äußere von γ) Zusammenhangskomponente.

Betrachte nun einen Pfad $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Wir schreiben γ in Polarkoordinaten um $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$:

$$\gamma(t) = z_0 + r(t)e^{i\theta(t)}.$$

Somit ist $\theta(t)$ ein Argument von $\gamma(t) - z_0$. Wir wissen, dass es keine stetige Argumentfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt. Kann man trotzdem eine stetige Funktion $t \mapsto \theta(t)$ finden? (z.B. für den Pfad $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 4\pi$ ist $\theta(t) = t$ stetig) Es stellt sich heraus, dass die Funktion $t \mapsto \theta(t)$ genau so regulär wie γ gewählt werden kann.

2.2.1 Wahl von stückweise stetig differenzierbarer Argumentfunktion eines Pfades

Satz 2.9:

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Pfad und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Dann $\exists$ stückweise stetig differenzierbare Funktionen $r, \theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\gamma(t) = z_0 + r(t)e^{i\theta(t)}, \quad a \leq t \leq b.$$

Beweis. Nebenrechnung: $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)} \implies \frac{\gamma(t)}{r(t)} = e^{i\theta(t)}$, nach ableiten:

$$i\theta'(t) \underbrace{e^{i\theta(t)}}_{\frac{\gamma(t)}{r(t)}} = \left(\frac{\gamma}{r}\right)'(t) \implies \theta'(t) = (-i) \frac{\left(\frac{\gamma}{r}\right)'(t)}{\left(\frac{\gamma}{r}\right)(t)}$$

Zuerst zeigen wir die Aussage für $z_0 = 0$ (ausgenommen $0 \notin \gamma^*$). Sei $\theta_0 := \text{Arg } \gamma(a)$ und setze

$$\theta(t) = \theta_0 + (-i) \int_a^t \frac{r(s)}{\gamma(s)} \left(\frac{\gamma}{r}\right)'(s) ds,$$

wobei $r(t) = |\gamma(t)| \neq 0$, $a \leq t \leq b$. Sei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ sodass $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ stetig differenzierbar ($1 \leq j \leq n$). Dann sind r und θ stetig differenzierbar auf $[t_{j-1}, t_j]$.

- $r(t) = |\gamma(t)|, \gamma(t) \neq 0$ klar

$$\bullet \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \theta(t) = \underbrace{\int_a^{t_{j-1}} \dots ds}_{\text{Konstante}} + \underbrace{\int_{t_{j-1}}^t \dots ds}_{\text{stetig differenzierbar}} + \theta_0$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\gamma}{r} e^{-i\theta}\right)'(t) &= \left(\frac{\gamma}{r}\right)'(t) e^{-i\theta(t)} + \left(\frac{\gamma}{r}\right)(t) (-i) \theta'(t) e^{-i\theta(t)} \\ &= e^{-i\theta(t)} \left(\left(\frac{\gamma}{r}\right)'(t) + \left(\frac{\gamma}{r}\right)(t) (-i) (-i) \left(\frac{r}{\gamma}\right)(t) \left(\frac{\gamma}{r}\right)'(t) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle $t \in [a, b]$ außer den (endlich vielen) Punkten wo γ möglicherweise nicht differenzierbar ist. Da $\frac{\gamma}{r} e^{-i\theta}$ stetig auf $[a, b]$ ist, folgt dass $\frac{\gamma}{r} e^{-i\theta}$ konstant auf $[a, b]$ ist.

$$\frac{\gamma}{r} e^{-i\theta} \equiv \frac{\gamma(a)}{r(a)} e^{-i\theta(a)} = \frac{\gamma(a)}{r(a)} e^{-i \text{Arg } \gamma(a)} = 1$$

und somit ist die Behauptung für $z_0 = 0$ bewiesen.

Um die Behauptung für $z_0 \neq 0$ zu zeigen, wende das obige Verfahren auf $\Gamma(t) = \gamma(t) - z_0$ ($0 \notin \Gamma^*$) an. $\square$

2.3 Windungszahlen

Definition:

Sei γ ein geschlossener Pfad in $\mathbb{C}$. Dann heißt

$$W_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$$

WINDUNGSZAHL von γ im Bezug auf z .

Alternative Notation: $\text{Ind}_\gamma(z)$ INDEX.

Lemma 2.10:

$\mathbb{C} \setminus \gamma^* \ni z \mapsto W_\gamma(z)$ ist stetig.

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ beliebig aber fest. Da $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ offen $\exists D_r(z) \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ mit $r > 0$. Sei nun $w \in D_{\frac{r}{2}}(z)$. Dann gilt

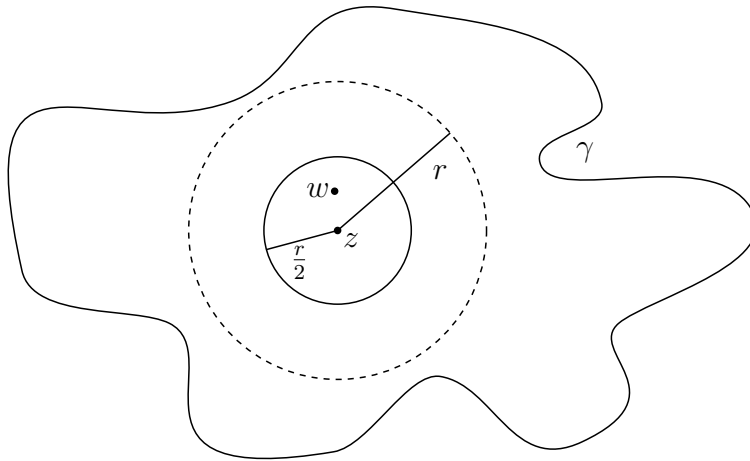


Abbildung 2.7: Skizze Theorem 2.10

$$\begin{aligned}
 2\pi i |W_\gamma(w) - W_\gamma(z)| &= \left| \int_\gamma \frac{1}{s-w} - \frac{1}{s-z} ds \right| \\
 &\stackrel{2.2}{\leq} L(\gamma) \sup_{s \in \gamma^*} \left| \frac{1}{s-w} - \frac{1}{s-z} \right| \\
 &= L(\gamma) \sup_{s \in \gamma^*} \frac{|s-z-s+w|}{\underbrace{|s-w|}_{\leq \frac{r}{2}} \underbrace{|s-z|}_{\leq \frac{r}{2}}} \leq L(\gamma) \frac{|w-z|}{\frac{r}{2} \frac{r}{2}} \xrightarrow{w \rightarrow z} 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

Satz 2.11:

W_γ ist eine ganzzahlige Funktion, das heißt $W_\gamma(\mathbb{C} \setminus \gamma^*) \subseteq \mathbb{Z}$, und W_γ ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ und verschwindet auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$

Bemerkung:

Da γ^* kompakt $\exists$ Kreisscheibe D mit $\gamma^* \subset D$. Da $\mathbb{C} \setminus D$ zusammenhängend ist $\implies \exists$ genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Beweis (Theorem 2.11). Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ beliebig aber fest. Der Theorem 2.9 ergibt $\gamma(t) = z + r(t)e^{i\theta(t)}$, $a \leq t \leq b$, wobei r, θ stückweise stetig differenzierbar sind (r, θ abhängig von z !). Dann gilt

$$\begin{aligned} 2\pi i W_\gamma(z) &= \int_\gamma \frac{1}{w-z} dw = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt \\ &= \int_a^b \frac{r'(t)e^{i\theta(t)} + r(t)i\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{r(t)e^{i\theta(t)}} dt \\ &= \int_a^b \frac{r'(t)}{r(t)} dt + i \int_a^b \theta'(t) dt = \log r(t) \Big|_a^b + i(\theta(b) - \theta(a)) \\ &= \underbrace{\log r(b) - \log r(a)}_{=0 \iff \gamma(a)=\gamma(b)} + i(\theta(b) - \theta(a)) \end{aligned}$$

und daher ist

$$W_\gamma(z) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}.$$

Nun

$$\begin{aligned} \gamma(a) = \gamma(b) &\iff r(a)e^{i\theta(a)} = r(b)e^{i\theta(b)} \\ &\iff e^{i(\theta(b)-\theta(a))} = 1 \\ &\iff \theta(b) - \theta(a) = k \cdot 2\pi \\ &\iff \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z} \implies W_\gamma(z) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Aber $W_\gamma(z)$ stetig (aus Theorem 2.10) und daher werden zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abgebildet. Somit ist W_γ konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} 2\pi |W_\gamma(z)| &= \left| \int_\gamma \frac{1}{w-z} dw \right| \leq L(\gamma) \max_{w \in \gamma^*} \frac{1}{|w-z|} \\ &= L(\gamma) \frac{1}{\min_{w \in \gamma^*} |w-z|} = L(\gamma) \frac{1}{\text{dist}(z, \gamma^*)} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

und somit ist $\underbrace{|W_\gamma(z)|}_{\in \mathbb{Z}} < 1$ für $|z|$ groß genug. Daher muss $W_\gamma(z) = 0$ auf der unbeschränkten

Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ gelten. $\square$

Bemerkung:

$W_\gamma(z) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$ (aus dem obigen Beweis).

$\theta(b) - \theta(a)$ ergibt die gesamte Argumentsänderung (von $\gamma - z$) als der Pfad durchlaufen wird. Grob gesprochen: $W_\gamma(z)$ zählt, wie oft sich γ um z „windet“ (für jede Windung gegen den Uhrzeigersinn +1, für jede Windung im Uhrzeigersinn -1).

W_γ ist ein Maß dafür, wie oft γ den Punkt z umläuft, daher wird es auch Umlaufzahl genannt.

Beispiel:

1. $\gamma_1: [0, n \cdot 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_1(t) = e^{it}$. Für $z \in D_1(0) = \{z: |z| < 1\}$ gilt

$$W_{\gamma_1}(z) \stackrel{2.11}{=} W_{\gamma_1}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{w-0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2n\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = \frac{i}{2\pi i} 2n\pi = n.$$

Aus dem Beweis von **Theorem 2.11** folgt (mit $\theta(t) = t, 0 \leq t \leq 2n\pi$)

$$W_{\gamma_1}(0) = \frac{\theta(n2\pi) - \theta(0)}{2\pi} = \frac{n2\pi - 0}{2\pi} = n.$$

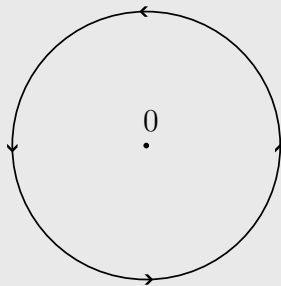


Abbildung 2.8: 2.11 Beispielkurve 1

2.

$$W_{\gamma_2} = \begin{cases} -1 & z \in K_1 \\ 1 & z \in K_2 \\ 0 & z \in K_3 \end{cases}$$

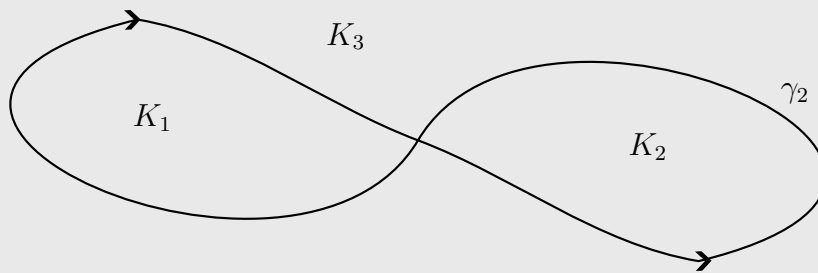


Abbildung 2.9: 2.11 Beispielkurve 2

3.

$$W_{\gamma_3} = \begin{cases} 1 & z \in K_1 \\ -1 & z \in K_2 \\ 0 & z \in K_3 \end{cases}$$

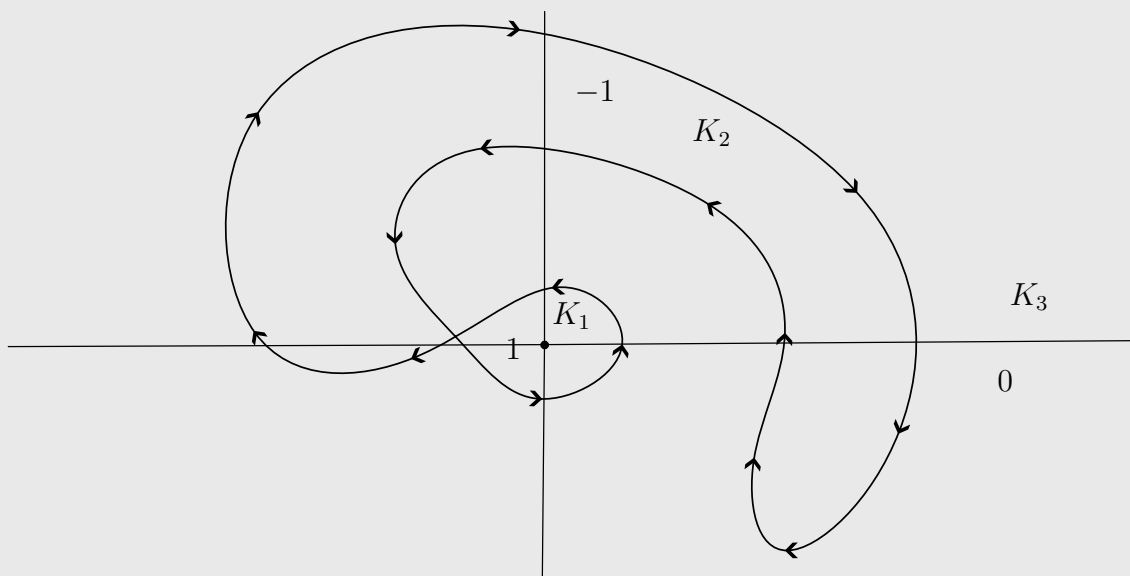


Abbildung 2.10: 2.11 Beispielkurve 3

4.

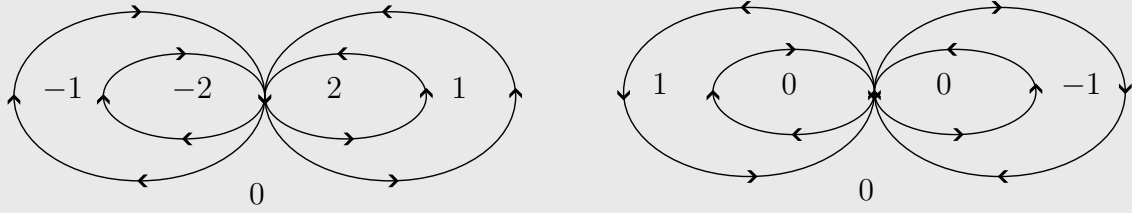


Abbildung 2.11: 2.11 Beispielkurve 4

Bemerkung:

$W_\gamma(z) = W_{\gamma-z}(0)$, wobei $(\gamma - z)(t) := \gamma(t) - z \forall t \in [a, b]$.

Beispiel (Veranschaulichendes Beispiel):

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Pfad mit $0 \notin \gamma^*$, der die negative x -Achse in endlich vielen Punkten $\lambda_k = \gamma(t_k)$ ($0 \leq k \leq n+1$) schneidet, wobei $t_0 := a < t_1 < t_2 < \dots < t_n < b =: t_{n+1}$, und setze $\varepsilon < \varepsilon_0 := \min_{1 \leq k \leq n+1} |t_k - t_{k-1}|$.

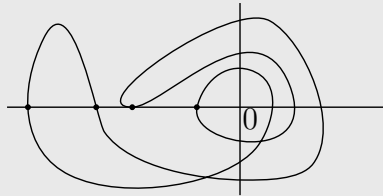


Abbildung 2.12: Pfad mit endlich vielen Schnittpunkten mit negativer x -Achse

Dann gilt

$$2\pi i W_\gamma(0) = \int_\gamma \frac{1}{w} dw = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds = \sum_{k=0}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \int_{t_k+\varepsilon}^{t_{k+1}-\varepsilon} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds.$$

Für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ gilt $\gamma([t_k + \varepsilon, t_{k+1} - \varepsilon]) \subset \mathbb{C}^-$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
2\pi i W_\gamma(0) &= \sum_{k=0}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Log}(\gamma(t_{k+1} - \varepsilon)) - \text{Log}(\gamma(t_k + \varepsilon)) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \log |\gamma(t_{k+1} - \varepsilon)| - \log |\gamma(t_k + \varepsilon)| \\
&\quad + i(\text{Arg}(\gamma(t_{k+1} - \varepsilon)) - \text{Arg}(\gamma(t_k + \varepsilon))) \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^n \log |\gamma(t_{k+1})| - \log |\gamma(t_k)|}_{=0, \text{ da Teleskopsumme und } \gamma \text{ geschlossen}} \\
&\quad + i \sum_{k=1}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\underbrace{\text{Arg}(\gamma(t_{k+1} - \varepsilon)) - \text{Arg}(\gamma(t_k + \varepsilon))}_{=: A_k})
\end{aligned}$$

1. $\Im(\gamma(t_{k+1} - \varepsilon)) > 0, \Im(\gamma(t_k + \varepsilon)) > 0 \forall \varepsilon < \varepsilon_0$.

$$\begin{aligned}
\text{Arg}(\gamma(t_{k+1} - \varepsilon)) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \pi \\
\text{Arg}(\gamma(t_k + \varepsilon)) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \pi,
\end{aligned}$$

also $A_k = \pi - \pi = 0$. Keine Windung um 0.

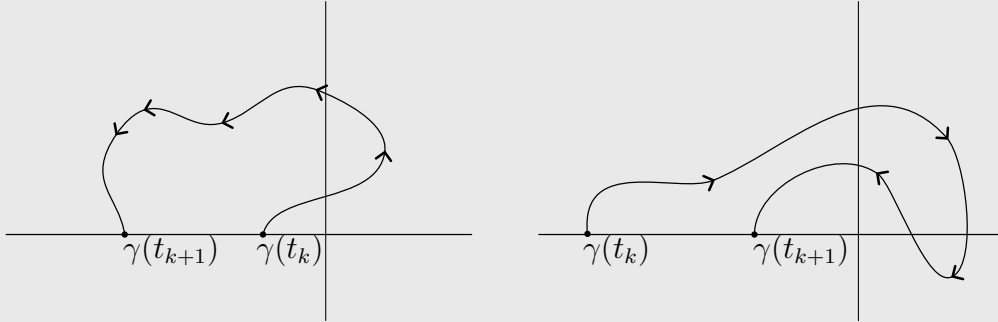


Abbildung 2.13: Möglichkeit 1

2. $\Im(\gamma(t_{k+1} - \varepsilon)) > 0, \Im(\gamma(t_k + \varepsilon)) > 0 \forall \varepsilon < \varepsilon_0$.

$$\begin{aligned}
\text{Arg}(\gamma(t_{k+1} - \varepsilon)) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \pi \\
\text{Arg}(\gamma(t_k + \varepsilon)) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\pi,
\end{aligned}$$

also $A_k = \pi - (-\pi) = 2\pi$, eine Windung um 0 im positiven Sinne.

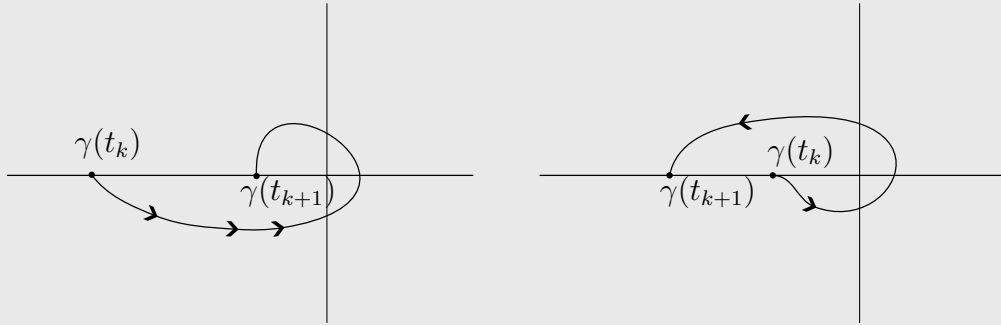


Abbildung 2.14: Möglichkeit 2

3. $\Im(\gamma(t_{k+1} - \varepsilon)) < 0, \Im(\gamma(t_k + \varepsilon)) < 0 \forall \varepsilon < \varepsilon_0$.

$$\begin{aligned} \text{Arg}(\gamma(t_{k+1} - \varepsilon)) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\pi \\ \text{Arg}(\gamma(t_k + \varepsilon)) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\pi, \end{aligned}$$

also $A_k = -\pi - (-\pi) = 0$. Keine Windung um 0.

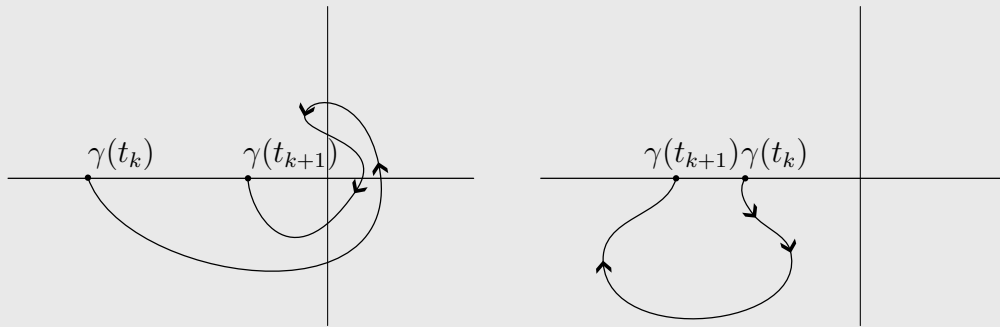


Abbildung 2.15: Möglichkeit 3

4. $\Im(\gamma(t_{k+1} - \varepsilon)) < 0, \Im(\gamma(t_k + \varepsilon)) > 0 \forall \varepsilon < \varepsilon_0$.

$$\begin{aligned} \text{Arg}(\gamma(t_{k+1} - \varepsilon)) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\pi \\ \text{Arg}(\gamma(t_k + \varepsilon)) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \pi, \end{aligned}$$

also $A_k = (-\pi) - \pi = 2\pi$, eine Windung um 0 im negativen Sinne.

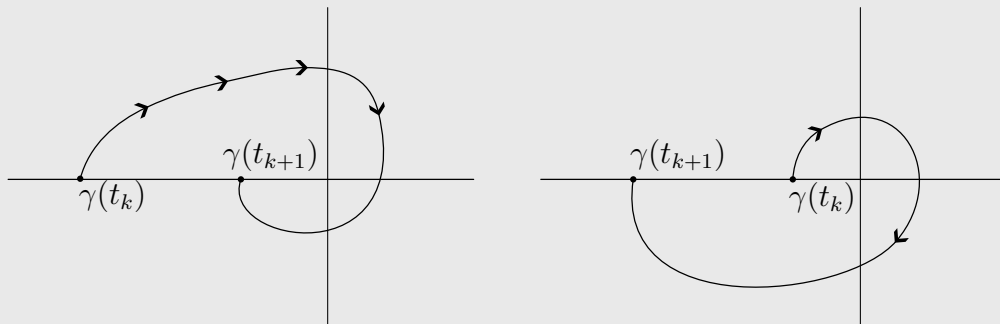


Abbildung 2.16: Möglichkeit 4

2.4 Der Satz von Cauchy für Sterngebiete

Satz 2.12 (Lemma von Goursat):

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $p \in \Omega$. Falls f stetig auf Ω und holomorph auf $\Omega \setminus \{p\}$ ist, dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} f dz = 0$$

für jedes Dreieck $\Delta \subset \Omega$.

Beweis. Nehmen wir erst an, dass $p \notin \Delta$. Durch Seitenhalbierung zerlegen wir Δ in 4 kongruente Teildreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. Dann gilt

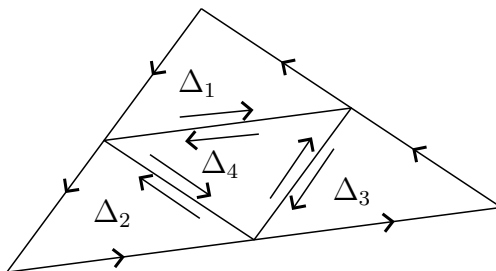


Abbildung 2.17: Zerlegung von Δ

$$\left| \int_{\partial\Delta} f dz \right| = \left| \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Delta_j} f dz \right| \leq 4 \max_{1 \leq j \leq 4} \left| \int_{\partial\Delta_j} f dz \right|,$$

denn die Strecken zwischen den Seitenmittelpunkten werden je zweimal, und zwar entgegengesetzt durchlaufen, sodass sich die zugehörigen Integrale wegheben. Bezeichne mit $\Delta^{(1)}$ das Dreieck wo das Maximum angenommen wird. Wiederhole dieses Verfahren für $\Delta^{(1)}$ und erhalte ein Dreieck $\Delta^{(2)}$ usw. Nach n Schritten entsteht eine Folge $\Delta \supset \Delta^{(1)} \supset \dots \supset \Delta^{(n)}$ von Dreiecken so dass gilt

$$\left| \int_{\partial\Delta} f dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f dz \right|. \quad (2.2)$$

Für den Umfang $L(\partial\Delta^{(n)})$ von $\partial\Delta^{(n)}$ gilt

$$L(\partial\Delta^{(n)}) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta^{(n-1)}) = \dots = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta)$$

Behauptung: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{(n)}$ besteht aus einem Punkt $z_0 \in \Omega$.

Da $L(\partial\Delta^{(n)}) \rightarrow 0$ (und somit Durchmesser($\Delta^{(n)}$) $\rightarrow 0$), gibt es höchstens einen Schnittpunkt. Für jedes $n \geq 1$ wähle $z_n \in \Delta^{(n)}$. Da Δ kompakt ist, existiert ein Häufungspunkt $z_0 \in \Delta$ der Folge $(z_n)_{n \geq 1}$. Aus $(z_n)_{n=m}^{\infty} \subset \Delta^{(m)} \forall m \in \mathbb{N}$ und $\Delta^{(m)}$ abgeschlossen folgt nun $z_0 \in \Delta^{(m)} \forall m \in \mathbb{N}$. Also gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{(n)} = \{z_0\}.$$

Da f komplex differenzierbar in z_0 ist, so folgt

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)g(z),$$

wobei

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

stetig in z_0 ist mit $g(z_0) = 0$. Tatsächlich gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = 0 = g(z_0).$$

Weiters gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) dz = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

da die Funktion unter dem Integral eine Stammfunktion besitzt. Daher ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Delta^{(m)}} f dz \right| &= \overbrace{\left| \int_{\partial\Delta^{(m)}} f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)g(z) dz \right|}^{=0} \\ &= \left| \int_{\partial\Delta^{(m)}} (z - z_0)g(z) dz \right| \leq L(\partial\Delta^{(m)}) \max_{z \in \Delta^{(m)}} |g(z)| \underbrace{|z - z_0|}_{\leq L(\partial\Delta^{(m)})} \\ &\leq L(\partial\Delta^{(m)})^2 \max_{z \in \Delta^{(m)}} |g(z)| \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Wir verwenden Gleichung (2.3) in Gleichung (2.2) um zu erhalten

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial\Delta} f dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f dz \right| \\
&\leq 4^n (L(\partial\Delta^{(n)}))^2 \max_{z \in \Delta^{(n)}} |g(z)| = 4^n \frac{(L(\partial\Delta))^2}{(2^n)^2} \max_{z \in \Delta^{(n)}} |g(z)| \\
&= (L(\partial\Delta))^2 \max_{z \in \Delta^{(n)}} |g(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

weil g stetig und $g(z_0) = 0$. Also gilt

$$\int_{\partial\Delta} f dz = 0.$$

Sei jetzt $p \in \Delta$. Ist p ein Eckpunkt von Δ , zum Beispiel $p = a$, dann machen wir die folgende Zerlegung

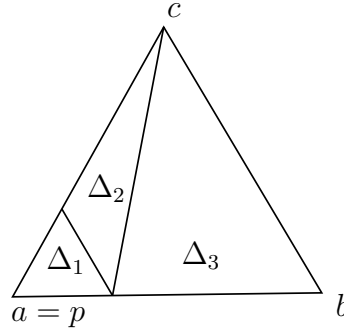


Abbildung 2.18: Zerlegung 1

Aus dem ersten Fall des Beweises folgt, dass

$$\int_{\partial\Delta_2} f dz = \int_{\partial\Delta_3} f dz = 0$$

und daher ist $\int_{\partial\Delta} f dz = \sum_{i=1}^3 \int_{\partial\Delta_i} f dz = \int_{\partial\Delta_1} f dz$. Wir können jetzt Δ_1 beliebig klein machen und die Stetigkeit von f verwenden um herzuleiten

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial\Delta_1} f dz \right| &\leq L(\partial\Delta_1) \max_{z \in \partial\Delta_1} |f(z)| \xrightarrow{L(\partial\Delta_1)} 0 \\
&\implies \int_{\partial\Delta} f dz = 0.
\end{aligned}$$

Falls $p \in \Delta$ kein Eckpunkt ist, dann machen wir die folgende Zerlegung,

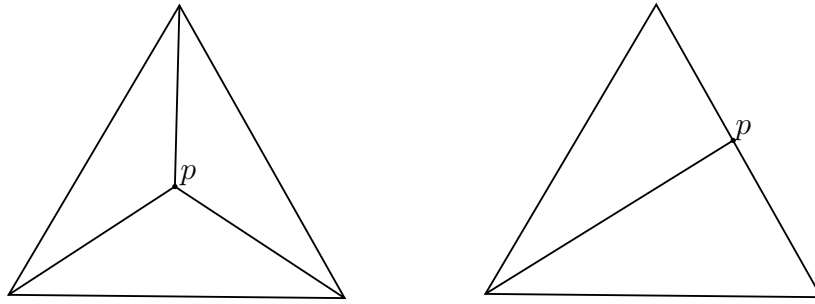


Abbildung 2.19: Zerlegung 2

um das Problem zum vorherigen Fall zu reduzieren. □

Satz 2.13 (Integralsatz von Cauchy für Sterngebiete):

Sei Ω ein Sterngebiet in $\mathbb{C}$, $p \in \Omega$ und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig auf Ω und holomorph auf $\Omega \setminus \{p\}$. Dann hat f eine Stammfunktion auf Ω und für jeden geschlossenen Pfad γ in Ω gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Beweis. Laut dem **Lemma von Goursat** ist

$$\int_{\partial\Delta} f dz = 0, \forall \Delta \text{ Dreieck in } \Omega.$$

Nach **Theorem 2.7** hat f eine Stammfunktion auf Ω und somit gilt nach **Theorem 2.4**

$$\int_{\gamma} f dz = 0 \quad \forall \gamma \text{ geschlossener Pfad in } \Omega. \quad \square$$

2.5 Wichtige Folgerungen des Integralsatzes von Cauchy

Satz 2.14 (Die Cauchy'sche Integralformel):

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Sterngebiet, γ geschlossener Pfad in Ω . Falls $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, dann gilt

$$f(z)W_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \forall z \in \Omega \setminus \gamma^*$$

Beweis. Sei $z \in \Omega \setminus \gamma^*$. Betrachte die Funktion

$$F(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z. \end{cases}$$

F ist auf Ω stetig und $F \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z\})$ und Ω ist ein Sterngebiet. Somit dürfen wir den **Integralsatz von Cauchy für Sterngebiete** verwenden um herzuleiten

$$\int_{\gamma} F(w)dw = 0 \iff 0 = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z) \underbrace{\int_{\gamma} \frac{1}{w-z}dw}_{2\pi i W_{\gamma}(z)}$$

Also gilt $f(z)W_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}dw$. □

Wichtiger Spezialfall: Cauchy'sche Integralformel für Kreisscheiben

Seien $a \in \mathbb{C}, \gamma(t) = a + re^{it}, t \in [0, 2\pi], 0 < r < R, f \in \mathcal{H}(D_R(a))$ Auf der Zusammenhangskomponente $D_r(a)$ um $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ ist W_{γ} konstant: $W_{\gamma}(z) = W_{\gamma}(a) \stackrel{!}{=} 1, \forall z \in D_r(a)$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}dw, \forall z \in D_r(a).$$

Sei nun $z = a$ oben und setze für γ ein

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it})}{a + re^{it} - a} \cdot rie^{it}dt \iff f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt, \forall r \in [0, R).$$

Das ist die Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen.

Beispiel:

Sei $g(z) = \frac{\cos z}{(z-2)(z-4)}$.

1. $\gamma_1: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_1(t) = e^{it}$. $g \in \mathcal{H}(D_{\frac{3}{2}}(0))$, γ_1 geschlossener Pfad im Sterngebiet $D_{\frac{3}{2}}(0)$. Der **Integralsatz von Cauchy für Sterngebiete** ergibt

$$\int_{\gamma_1} g dz = 0.$$

2. $\gamma_2: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_2(t) = 3e^{it}$. $f(z) = \frac{\cos z}{z-4}$ holomorph in $D_{3+\frac{1}{2}}(0) = D_{\frac{7}{2}}(0)$. Die Cauchy'sche Integralformel für Kreisscheiben ergibt

$$\int_{\gamma_2} \frac{\cos z}{z-2} dz = 2\pi i f(2) = 2\pi i \frac{\cos 2}{2-4} = -i\pi \cos 2.$$

3. $\gamma_3: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_3(t) = 5e^{it}$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} \frac{\cos z}{(z-2)(z-4)} dz &= \frac{1}{2} \left(\int_{\gamma_3} \frac{\cos z}{z-4} - \frac{\cos z}{z-2} dz \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\gamma_3} \frac{\cos z}{z-4} dz - \int_{\gamma_3} \frac{\cos z}{z-2} dz \right) \\ &= \frac{1}{2} (2\pi i \cos 4 - 2\pi i \cos 2) = \pi i (\cos 4 - \cos 2), \end{aligned}$$

da $z \mapsto \cos z$ holomorph auf $\mathbb{C}$ ist.

Satz 2.15 (Taylorentwicklung):

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sei $a \in \Omega$ und $R > 0$ mit $D_R(a) \subseteq \Omega$. Dann ist f um a in einer Potenzreihe entwickelbar, das heißt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad z \in D_R(a). \quad (2.4)$$

Die Taylorkoeffizienten a_n werden gegeben durch

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.5)$$

wobei $\gamma_r(t) = a + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ und $0 < r < R$.

Bemerkung:

Die Integrale in [Gleichung \(2.5\)](#) sind unabhängig von r . $0 < r < R$ und der Konvergenzradius der Potenzreihe in [Gleichung \(2.4\)](#) ist $\geq R$.

Beweis (Taylorentwicklung). Sei $0 < r < R$ fixiert. Für jedes $z \in D_r(a)$ ergibt die Cauchy'sche Integralformel für Kreisscheiben:

$$\begin{aligned} 2\pi i f(z) &= \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-a+a-z} dw \\ &= \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-a)(1-\frac{z-a}{w-a})} dw = \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n dw. \end{aligned}$$

$\left| \frac{z-a}{w-a} \right| = \frac{|z-a|}{r} < 1$

Für $w \in \gamma_r^*$ (das heißt $|w - a| = r$) gilt

$$\left| \frac{f(w)}{w-a} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n \right| \leq \frac{1}{r} \max_{w \in \gamma_r^*} |f(w)| \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n.$$

Da $\frac{|z-a|}{r} < 1$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n$ konvergent.

Aus dem Weierstraßkriterium folgt nun, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w-a} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n$ gleichmäßig in $w \in \gamma_r^*$ konvergiert. Wegen **Theorem 2.8** gilt

$$2\pi i f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n.$$

Somit erhalten wir $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $z \in D_r(a)$, wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

Laut **Theorem 1.11** ist f auf $D_r(a)$ beliebig oft differenzierbar mit

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) (z-a)^{n-k}, k \in \mathbb{N}.$$

Setze $z = a$ oben und erhalte $f^{(k)} = a_k k! \forall k \in \mathbb{N}$. Also $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, das ist unabhängig von $r \in (0, R)$! Da $r \in (0, R)$ beliebig war sind jetzt die **Gleichungen (2.4)** und **(2.5)** bewiesen. $\square$

Korollar 2.16:

Ist $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ^{offen}, dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar auf Ω , das heißt $f^{(n)} \in \mathcal{H}(\Omega) \forall n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung:

?? 2.15?? 2.16: Kontrast zu $\mathbb{R}$:

- $f(x) = x|x|$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $f'(x) = 2|x|$ nicht differenzierbar in $x = 0$!
- $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \implies f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N} \implies f$ ist in keiner Umgebung von $x = 0$ in einer Potenzreihe um 0 entwickelbar.

Satz 2.17 (Die Cauchy'sche Formel für Ableitungen):

Seien $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $f \in \mathcal{H}(D_R(a))$, $r \in (0, R)$ und $\gamma_r(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw, z \in D_r(a) \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis. Für $z = a$ folgt das aus [Gleichung \(2.5\)](#) aus [Theorem 2.15](#). Sei $z \neq a$ mit $|z - a| < r$. Sei $\delta > 0$ sodass $\overline{D_\delta(z)} \subset D_r(a)$ und setze $\sigma(t) = z + \delta e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Mittels

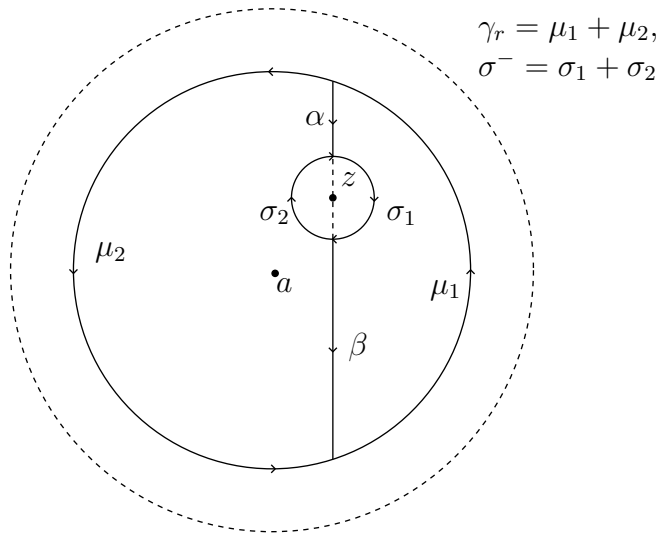


Abbildung 2.20: Definitionen für $\sigma_1, \sigma_2, \mu_1, \mu_2, \alpha, \beta$

einer vertikalen Gerade durch z machen wir den folgenden Schnitt: für jede Halbebene betrachten wir den geschlossenen Pfad, der aus den entsprechenden „Teilen“ von γ_r und σ^- und den entsprechenden Geradenstücken besteht, nämlich

$$\text{Rechts: } \Gamma_1 := \mu_1 + \alpha + \sigma_1 + \beta$$

$$\text{Links: } \Gamma_2 := \mu_2 + \beta^- + \sigma_2 + \alpha^-$$

Jeder Pfad Γ_k ist in einem Sterngebiet $D_R(a) \setminus \{z\}$ enthalten (z. B. ist Γ_1 im Sterngebiet $D_R(a) \setminus [\lambda, z]$ enthalten, siehe [Abbildung 2.21](#)), wo δ konstant ist. Aus dem [Integralsatz von Cauchy für Sterngebiete](#) folgt

$$\int_{\Gamma_k} g_z(w) dw = 0$$

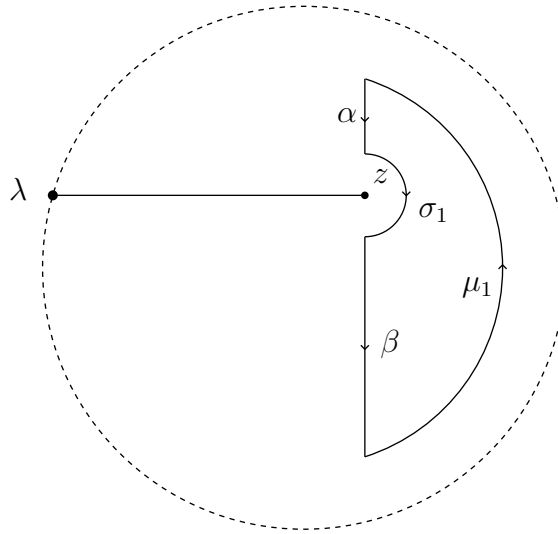


Abbildung 2.21: Γ_1

für $k = 1, 2$

$$\begin{aligned}
 \implies 0 &= \int_{\Gamma_k} g_z(w) dw + \int_{\Gamma_2} g_z(w) dw \\
 &= \int_{\gamma_r} g_z(w) dw + \int_{\sigma^-} g_z(w) dw \\
 &= \int_{\gamma_r} g_z(w) dw - \int_{\sigma} g_z(w) dw.
 \end{aligned}$$

Weil $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma^-$ und $\mu_1 + \mu_2 = \gamma_r$ und die Integrale längs der Geradenstücke sich wegheben. Aus [Theorem 2.15](#) folgt

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw = \int_{\sigma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \stackrel{2.15}{=} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \cdot 2\pi i.$$

□

Beispiel:

1. $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi.$

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z - \frac{1}{2})^4} dz = 2\pi i \frac{\sin^{(3)}(\frac{1}{2})}{3!} = \frac{2\pi i (-\cos(\frac{1}{2}))}{2 \cdot 3} = -\frac{\pi i \cos \frac{1}{2}}{3}$$

2. $\gamma(t) = 2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi.$

$$I = \int_{\gamma} \frac{e^z}{z^3(z+5)}$$

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+5)} \in \mathcal{H}(D_3(0)). \quad \gamma^* \subset D_3(0) \implies$$

$$I = \int_{\gamma} \frac{(\frac{e^z}{z+5})}{z^3} dz = 2\pi i \frac{f''(0)}{2!}$$

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \left(e^z \frac{1}{z+5} \right)' = e^z \left(\frac{1}{z+5} - \frac{1}{(z+5)^2} \right) \\
f''(z) &= e^z \left(\frac{1}{z+5} - \frac{1}{(z+5)^2} - \frac{1}{(z+5)^2} + \frac{2}{(z+5)^3} \right) \\
f''(0) &= \frac{1}{5} - \frac{2}{25} + \frac{2}{125} = \frac{17}{125} \\
\implies I &= \pi i \frac{17}{125}.
\end{aligned}$$

Beweisen wir jetzt die Umkehrung von dem **Lemma von Goursat**.

Satz 2.18 (Satz von Morera):

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Falls

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0 \quad \forall \Delta \subset \Omega \text{ Dreieck},$$

dann gilt $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Beweis. Sei $z \in \Omega$ und $D_R(z) \subset \Omega$. Da $D_R(z)$ ein Sterngebiet ist, folgt nun aus **Theorem 2.7**, dass f eine Stammfunktion auf $D_R(z)$ besitzt. $F' = f$. Außerdem aus **Theorem 2.16** ist $f \in \mathcal{H}(D_R(z))$. $\square$

Folgerung: f stetig auf $\Omega \stackrel{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\}) \implies f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Beweis. f stetig auf Ω , $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\}) \stackrel{2.12}{\implies} \int_{\partial\Delta} f dz = 0, \forall \Delta \subset \Omega \text{ Dreieck} \stackrel{2.18}{\implies} f \in \mathcal{H}(\Omega)$. $\square$

2.6 Nullstellen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Wir nennen $N(f) = \{a \in \Omega: f(a) = 0\}$ die NULLSTELLENMENGE von f .

- Da f stetig $\implies N(f) = f^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen in Ω .
- Sei $a \in N(f)$. Laut **Theorem 2.15** $\exists r > 0$ mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \forall z \in D_r(a) \subset \Omega$, wobei $a_0 = f(a) = 0$. Es gibt genau 2 Möglichkeiten
 1. $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N} \iff f \equiv 0$ auf $D_r(a)$
 2. $\exists m = m(a) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass $a_0 = \dots = a_{m-1} = 0$ und $a_m \neq 0$. In diesem Fall heißt a eine NULLSTELLE DER ORDNUNG m von f .

Satz 2.19:

Sei $\Omega \subseteq^{\text{offen}} \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $a \in \Omega$ eine Nullstelle der Ordnung m von f ($m \geq 1$). Dann existiert $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $g(a) \neq 0$, sodass

$$f(z) = (z - a)^m \cdot g(z), \quad z \in \Omega.$$

Zusätzlich ist a kein Häufungspunkt von $N(f)$, das heißt a ist ein ISOLIERTER PUNKT von $N(f)$ ($\iff \exists$ eine Umgebung von a , die keine andere Nullstelle von f außer a enthält).

Beweis. a Nullstelle der Ordnung m von f . $\implies \exists D_r(a) \subset \Omega$ mit $r > 0$ sodass

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - a)^k, \quad z \in D_r(a) \text{ und } a_m \neq 0 \\ &= (z - a)^m \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - a)^{\overbrace{k-m}^n} \\ &= (z - a)^m \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - a)^n}_{g(z)} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Setze

$$g(z) = \begin{cases} (z - a)^{-m} f(z) & z \in \Omega \setminus \{a\} \\ a_m & z = a. \end{cases}$$

Es gilt $f(z) = (z - a)^m g(z)$ und $g \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Für $z \in D_r(a)$ ist aus **Gleichung (2.6)**

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - a)^n$$

gegeben $\implies g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Da $g(a) = a_m \neq 0$ und g stetig in $a \implies \exists \varepsilon > 0$ mit $g(z) \neq 0 \forall z \in D_\varepsilon(a)$. Daraus folgt

$$f(z) = (z - a)^m g(z) \neq 0 \quad \forall z \in D_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$$

$\implies D_\varepsilon(a)$ enthält keine andere Nullstelle von f außer a . $\implies a$ ist ein isolierter Punkt von $N(f)$. $\square$

Zusammengefasst:

$$a \in N(f) \begin{cases} a \text{ Nullstelle endlicher Ordnung} \implies a \text{ isolierter Punkt von } N(f) \\ a \text{ keine Nullstelle endlicher Ordnung} \implies \exists r > 0: f \equiv 0 \text{ auf } D_r(a) \end{cases}$$

Satz 2.20:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dann gilt $f \equiv 0$ auf Ω oder $N(f)$ hat keinen Häufungspunkt in Ω und ist in diesem Fall höchstens abzählbar.

Beweis. Sei H die Menge aller Häufungspunkte von $N(f)$ in Ω . f stetig $\implies H \subseteq N(f)$

Beh. 1 H offen. Sei $a \in H$ beliebig. Wegen **Theorem 2.19** ist a keine Nullstelle endlicher Ordnung von f , das heißt $\exists r > 0$ mit $f \equiv 0$ auf $D_r(a) \subseteq \Omega \implies D_r(a) \subset H \implies H$ offen.

Beh. 2 $\Omega \setminus H$ offen. Sei $z \in \Omega \setminus H$. Da z kein Häufungspunkt von $N(f) \implies \exists \varepsilon > 0$ mit $D_\varepsilon(z) \subset \Omega$.

$$D_\varepsilon(z) \cap N(f) \subseteq \{z\} \xrightarrow[z \notin H]{H \subseteq N(f)} D_\varepsilon(z) \cap H = \emptyset \iff D_\varepsilon(z) \subset \Omega \setminus H \implies \text{Beh. 2}$$

Also $H \cup (\Omega \setminus H), H, \Omega \setminus H$ offen und Ω Gebiet $\implies$ entweder $H = \Omega$, das heißt $f \equiv 0$ auf Ω oder $H = \emptyset$, das heißt $N(f)$ hat keinen Häufungspunkt in Ω .

Es bleibt zu zeigen, dass $N(f)$ höchstens abzählbar ist, falls $f \not\equiv 0$. Falls $f \not\equiv 0$, dann gilt

$$\forall z \in N(f) \exists \delta_z > 0 \text{ mit } D_{\delta_z}(z) \cap N(f) = \{z\}$$

$\forall z, w \in N(f), z \neq w \quad \delta_z, \delta_w < |z - w| \implies \frac{\delta_z}{2}, \frac{\delta_w}{2} < \frac{|z - w|}{2}$. Daher ist $D_{\frac{\delta_z}{2}}(z) \cap D_{\frac{\delta_w}{2}}(w) = \emptyset$.

Da $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}^2$ ist, dürfen wir $\forall z \in N(f)$ einen Punkt

$$(p_z + iq_z) \in D_{\frac{\delta_z}{2}}(z) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$$

wählen. Somit erhalten wir eine injektive Abbildung $\Phi: N(f) \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit $\Phi(z) := p_z + iq_z$. Also gilt $|N(f)| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| \implies N(f)$ höchstens abzählbar. $\square$

Satz 2.21 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen):

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ und setze $M = \{z \in \Omega: f(z) = g(z)\}$. Falls M einen Häufungspunkt in Ω besitzt, dann gilt $f = g$ auf Ω .

Beweis. Sei $h := f - g \implies h \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $N(h) = M$. Wegen **Theorem 2.20** gilt $h \equiv 0$ auf Ω . $\square$

Bemerkung:

1. Die Voraussetzung, dass Ω ein Gebiet ist in ?? 2.20?? 2.21 ist wesentlich:
 $\Omega = D_1(0) \cup D_1(5)$

$$f(z) = \begin{cases} 0 & z \in D_1(0) \\ -1 & z \in D_1(5) \end{cases} \implies f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

aber $f \equiv 0$ auf $D_1(0)$ und $f \not\equiv 0$ auf Ω !

2. Kontrast zur reellen Differenzierbarkeit.

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist eine $C^\infty(\mathbb{R})$ -Funktion und die Nullstellen, zum Beispiel $x_n = -\frac{1}{n}$ häufen sich in 0.

$$f_2(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

$f_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ und mit $x_k = \frac{1}{k\pi} \rightarrow 0$ für $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ und $f(x_k) = 0$ aber $f \not\equiv 0$ auf $\mathbb{R}$.

3. Die Nullstellen holomorpher Funktionen können sich wohl gegen den Rand der Definitionsmenge häufen.

- $f_3(z) = \sin \frac{1}{z}, \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. $f_3 \in \mathcal{H}(\Omega)$. Der Rand $\partial\Omega = \{0\}$.

$$N(f_3) = \left\{ \frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \text{ und } \frac{1}{k\pi} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

- $f_4(z) = \cos \frac{z+1}{z-1}, \Omega = \mathbb{C} \setminus \{1\}, f_4 \in \mathcal{H}(\Omega)$. Nullstellen: $\frac{z+1}{z-1} = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \iff z = z_k = \frac{(2k+1)\frac{\pi}{2}+1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$

Korollar 2.22:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $a \in \Omega$. Falls $f^{(n)}(a) = 0 (n \in \mathbb{N})$, dann ist $f \equiv 0$ auf Ω .

Satz 2.23:

Sei Ω ein Gebiet und $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $f(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f besitzt einen holomorphen Logarithmus auf Ω , das heißt $\exists g \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $e^g = f$ auf Ω .
2. $\frac{f'}{f}$ hat eine Stammfunktion auf Ω .

Beweis. **1** $\implies$ **2** $f = e^g \implies f' = e^g g' = f g' \xrightarrow{f \neq 0} g' = \frac{f'}{f} \implies \frac{f'}{f}$ hat eine Stammfunktion auf Ω .

2 $\implies$ **1** Sei $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $F' = \frac{f'}{f}$.

$$(e^{-F} f)' = e^{-F} f' - e^{-F} F' f = e^{-F} \left(f' - \frac{f'}{f} f \right) = 0.$$

Da Ω ein Gebiet ist, gilt $f e^{-F} \equiv a$ auf Ω mit $a \neq 0$, da $f \neq 0 \implies$

$$f = a e^F = |a| e^{i \operatorname{Arg} a} e^F = e^{F + \log |a| + i \operatorname{Arg} a} = e^g,$$

wobei $g = F + \log |a| + i \operatorname{Arg} a \in \mathcal{H}(\Omega)$. □

Korollar 2.24:

Falls Ω Sterngebiet, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $f(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$, dann besitzt f einen holomorphen Logarithmus.

Beweis. $f(z) \neq 0 \forall z \in \Omega \implies \frac{f'}{f} \in \mathcal{H}(\Omega) \xrightarrow{\Omega \text{ Sterngebiet}} \frac{f'}{f}$ hat eine Stammfunktion auf $\Omega \xrightarrow{2.23}$ Behauptung. □

2.7 Das Maximumprinzip und Cauchy'sche Abschätzungen, der Satz von Liouville

Lemma 2.25:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $|f|$ konstant auf Ω . Dann ist f konstant auf Ω .

Beweis (1). Sei $u = \Re f, v = \Im f$. Da $|f|$ konstant, $\exists k \in \mathbb{R}_+$, sodass

$$|f|^2 = u^2 + v^2 = k. \tag{2.7}$$

Falls $k = 0$ ist offensichtlich $f \equiv 0$ auf Ω . Sei nun $k > 0$. Wir differenzieren nach x , bzw y in **Gleichung (2.7)** und erhalten

$$\begin{cases} 2uu_x + 2vv_x = 0 \\ 2uu_y + 2vv_y = 0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{u_x=v_y \\ u_y=-v_x}]{1.3} \begin{cases} uu_x - vv_y = 0 \\ vu_x + uu_y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.8a) \\ (2.8b) \end{matrix}$$

$u \cdot 2.8a + v \cdot 2.8b$ ergibt nun $\overbrace{(u^2 + v^2)}^{=k>0} u_x = 0 \implies u_x = 0$. Analog ergibt $v \cdot 2.8a - u \cdot 2.8b$, dass $u_y = 0$. $\implies$ wegen Ω Gebiet, dass u konstant auf Ω . Aus den Cauchy-Riemann Gleichungen **Theorem 1.3** folgt nun, dass v auf Ω konstant ist. $\square$

Beweis (2, Geometrisch). Sei $|f| = k > 0$. Angenommen $\exists z_0 \in \Omega$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann ist f winkeltreu um z_0 . Sei $\delta > 0$ mit $\overline{D_\delta(z_0)} \subset \Omega$ und betrachte

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= z_0 + t, & -\delta \leq t \leq \delta \\ \gamma_2(t) &= z_0 + it, & -\delta \leq t \leq \delta. \end{aligned}$$

γ_1, γ_2 schneiden sich senkrecht in $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$. $\xrightarrow{\text{Winkeltreue}}$ Bildkurven $\Gamma_1 = f \circ \gamma_1, \Gamma_2 = f \circ \gamma_2$ schneiden sich senkrecht in $\Gamma_1(0) = \Gamma_2(0) = f(z_0)$. Aber $|\Gamma_1(t)| = |\Gamma_2(t)| = k$. $\implies$ der Winkel zwischen Γ_1 und Γ_2 in $\Gamma_1(0) = \Gamma_2(0)$ ist entweder 0 oder π . Widerspruch, $\implies f'(z) = 0 \forall z \in \Omega \implies f$ konstant. $\square$

Satz 2.26:

Sei Ω Gebiet, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Falls $\exists a \in \Omega$ mit

$$|f(a)| = \sup_{z \in \Omega} |f(z)|, \quad (2.9)$$

dann ist f konstant auf Ω .

Beweis. Sei $a \in \Omega$, das **Gleichung (2.9)** erfüllt und $R > 0$ sodass $D_R(a) \subseteq \Omega$. Aus der Mittelwerteigenschaft folgt

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt, \quad 0 \leq r < R.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |f(a)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{it})| dt \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{it})| dt \\ \iff \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(a)| - |f(a + re^{it})|}_{=:g(t) \geq 0} dt &\leq 0. \end{aligned}$$

Da $g(t) = |f(a)| - |f(a + re^{it})| \geq 0$ gilt

$$0 \leq \int_0^{2\pi} g(t) dt \leq 0 \iff \int_0^{2\pi} g(t) dt = 0.$$

Aus der Stetigkeit von g folgt nun $g \equiv 0$ auf $[0, 2\pi]$. Also ist

$$|f(a + re^{it})| = |f(a)| \quad \forall r \in [0, R], \forall t \in [0, 2\pi],$$

das heißt $|f| \equiv |f(a)|$ auf $D_R(a)$. Wegen [Theorem 2.25](#) gilt $f \equiv f(a)$ auf $D_R(a)$ $\xrightarrow{2.21}$ $f \equiv f(a)$ auf Ω . $\square$

Korollar 2.27 (Maximumprinzip):

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f: \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, nicht konstant auf G , mit $f \in \mathcal{H}(G)$. Dann nimmt $|f|$ ihr Maximum auf ∂G an.

Beweis. $\overline{G}$ kompakt und $|f|$ stetig auf $\overline{G} \implies \exists a \in \overline{G}$ mit $|f(a)| = \max_{z \in \overline{G}} |f(z)|$. Aus [Theorem 2.26](#) folgt $a \in \partial G$, da f nicht konstant auf G ist. $\square$

Satz 2.28 (Cauchy'sche Abschätzungen):

Sei U offen, $a \in U$ und $r > 0$ sodass $\overline{D_r(a)} \subset U$. Falls $f \in \mathcal{H}(U)$, dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z-a|=r} |f(z)|$$

Beweis. Sei $\gamma(t) = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. Aus [Theorem 2.2](#) und [Theorem 2.15](#) folgt

$$|f^{(n)}(a)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right| \leq \frac{n!}{2\pi} L(\gamma) \max_{w \in \gamma^*} \frac{|f(w)|}{|w-a|^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi} \frac{2\pi r}{r^{n+1}} \max_{w \in \gamma^*} |f(w)|. \quad \square$$

Definition:

Eine Funktion $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ heißt GANZE Funktion.

Satz 2.29 (Satz von Liouville):

Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ und $a \in \mathbb{C}$ beliebig, $M \in \mathbb{R}_+$, sodass $|f(z)| \leq M, z \in \mathbb{C}$. Nach **Theorem 2.28** gilt für $n = 1$

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{r} \max_{|z-a|=r} |f(z)| \leq \frac{M}{r}, \quad \forall r > 0.$$

Für $r \rightarrow \infty$ erhalten wir $|f'(a)| = 0 \implies f'(a) = 0 \forall a \in \mathbb{C} \implies f$ konstant auf $\mathbb{C}$. $\square$

Kontrast zu $\mathbb{R}$: $C^\infty(\mathbb{R})$ Funktionen $\sin, \cos, \arctan, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ beschränkt, aber nicht konstant!

Korollar (Fundamentalsatz der Algebra):

Jedes nicht konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

Beweis. Nehmen indirekt an, dass $\exists p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ mit $a_n \neq 0, n \geq 1$ und $p(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Dann ist $\frac{1}{p} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Es gilt

$$|p(z)| = |a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n| \geq |a_n| |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} +\infty.$$

Dann gilt $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{p(z)} \right| = 0$ und somit $\exists R > 0$ sodass $\frac{1}{p(z)} < 1$, für $|z| > R$. Mit $M = \max_{|z| \leq R} \frac{1}{|p(z)|}$ gilt nun $\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \max\{1, M\}$. Laut dem **Satz von Liouville** muss $\frac{1}{p}$ und somit auch p konstant sein, ein Widerspruch. $\square$

Alternativ hätte man diesen Beweis auch mittels Maximumprinzip führen können.

Satz 2.30 (Weierstraß'scher Konvergenzsatz):

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f_n \in \mathcal{H}(U) (n \in \mathbb{N})$, sodass $(f_n)_n$ gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von U gegen $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist $f \in \mathcal{H}(U)$ und es gilt $f_n^{(k)} \xrightarrow[\text{auf } K]{\text{gleichmäßig}} f^{(k)}, \forall K \subset U \text{ kompakt}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Beweis. f stetig auf U als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen. Für jedes Dreieck $\Delta \subset U$ gilt

$$\int_{\partial \Delta} f dz \stackrel{2.8}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{\partial \Delta} f_n dz}_{=0} \stackrel{2.12}{=} 0.$$

Nach dem **Satz von Morera** ist $f \in \mathcal{H}(U)$. Es genügt die 2. Behauptung für $k = 1$ zu zeigen.

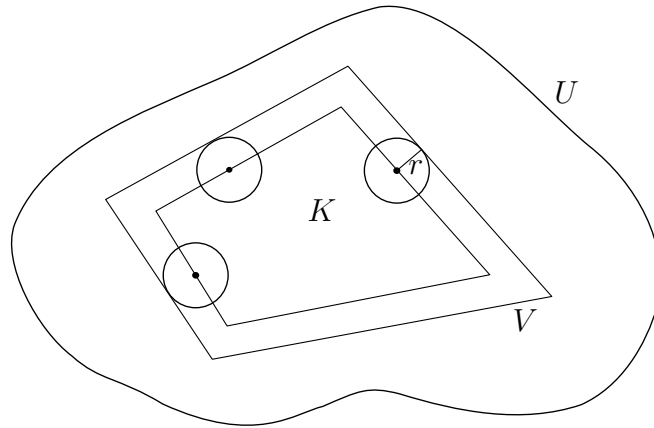


Abbildung 2.22: Skizze 2.30

Sei $K \subset U$ kompakt. Dann gilt $\text{dist}(K, U^c) > 0$, weil K kompakt, U^c abgeschlossen und $K \cap U^c = \emptyset$. Mit $0 < r < \frac{\text{dist}(K, U^c)}{2}$ gilt $K \subset \bigcup_{z \in K} D_r(z) =: V$. Dann ist $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$, V beschränkt $\implies \bar{V}$ kompakt.

Nach den **Cauchy'sche Abschätzungen** gilt

$$\begin{aligned} \sup_{z \in K} |f'_n(z) - f'(z)| &= \sup_{z \in K} |(f_n - f)'(z)| \leq \sup_{z \in K} \frac{1}{r_z} \max_{|w-z|=r_z} |(f_n - f)(w)| \\ &\leq \sup_{z \in K} \left(\frac{1}{r} \max_{w \in \bar{V}} |(f_n - f)(w)| \right) = \frac{1}{r} \max_{w \in \bar{V}} |(f_n - f)(w)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Also gilt $f'_n \xrightarrow[\text{auf } K]{\text{gleichmäßig}} f'$.

□

Bemerkung:

Kontrast zu reell differenzierbaren Funktionen: Betrachte die Weierstraßfunktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \cos(21^k \pi x).$$

Die Partialsummen

$$C^\infty(\mathbb{R}) \ni S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} \cos(21^k \pi x) \xrightarrow[\text{auf } \mathbb{R}]{\text{gleichmäßig}} f$$

und somit ist f stetig. Man kann aber zeigen, dass f *nirgendwo* differenzierbar ist.

2.8 Singularitäten

Definition:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$. Falls $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ heißt a ISOLIERTE SINGULARITÄT von f .

1. a heißt HEBBARE Singularität von f , falls f nach a holomorph fortzusetzen ist, das heißt $\exists \tilde{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $\tilde{f}|_{\Omega \setminus \{a\}} = f$.
2. Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. a heißt POL m -ter Ordnung von f , falls $\exists g \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $g(a) \neq 0$ sodass

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} g(z), \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a\}.$$

3. a heißt WESENTLICHE Singularität von f , falls a kein Pol und keine hebbare Singularität von f ist.

Satz 2.31:

Sei $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f hat eine hebbare Singularität in a ,
2. $\exists \lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$,
3. $\exists r > 0$ mit $D'_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < r\}$ und f ist beschränkt auf $D'_r(a)$.

Beweis. Punkt 1 $\implies$ Punkt 2 $\implies$ Punkt 3 ist klar.

3 $\implies$ 1: Definieren

$$h(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & z \neq a \\ 0 & z = a \end{cases}$$

Offensichtlich $h \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Es gilt

$$\exists h'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)^2 f(z) - 0}{\cancel{(z-a)}} \stackrel{f \text{ beschränkt}}{\underset{\text{um } a}{=}} 0$$

und somit ist $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $h(a) = h'(a) = 0$, das heißt a ist Nullstelle ≥ 2 . Ordnung für h . Laut Theorem 2.19 $\exists g \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit

$$h(z) = (z-a)^2 g(z) \quad \forall z \in \Omega.$$

Also ist

$$f(z) = (z-a)^{-2} h(z) = g(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a\}$$

holomorph nach $z = a$ fortzusetzen (durch die Definition $f(a) := g(a)$). $\square$

Beispiel:

$$1. f(z) = \frac{\sin z}{z}, f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Die Potenzreihe konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$, mit $f(0) := 1$ erhalten wir eine Funktion $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Insbesondere

Bemerkung 2.32:

$$\text{Es gilt } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

$$2. f(z) = \frac{z^2}{e^z - 1 - z}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!}} \stackrel{k=2}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!}} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(0)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

mit $g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \implies g$ stetig in 0. Also hat f eine hebbare Singularität.

Bemerkung:

Die Aussage in **Theorem 2.31** ist im Allgemeinen falsch für nicht isolierte Singularitäten.

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z, \quad -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$$

ist in keinem $x \in \mathbb{R}_-$ stetig fortsetzbar. $\forall a \in \mathbb{R}_-$ ist a keine isolierte Singularität. Für $a < 0$ und $|z - a| < \frac{|a|}{2}$ gilt

$$|\operatorname{Log} z| \leq |\log |z|| + \underbrace{|i \operatorname{Arg} z|}_{\leq \pi} \leq \max \left\{ \left| \log \frac{3|a|}{2} \right|, \left| \log \frac{|a|}{2} \right| \right\} + \pi.$$

Satz 2.33:

Sei $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. a ist Pol m -ter Ordnung von f ($m \geq 1$),
2. $\exists c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}, c_m \neq 0$ sodass $f - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-a)^k}$ eine hebbare Singularität in a hat,
3. $\exists \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Beweis. **1** $\implies$ **2**: a Pol m -ter Ordnung $\implies \exists g \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $g(a) \neq 0$, sodass

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} g(z), \quad z \in \Omega \setminus \{a\}.$$

Aus **Theorem 2.15** $\exists r > 0$ sodass

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad \forall z \in D_r(a)$$

mit $a_0 = g(a) \neq 0$. Daraus folgt $\forall z \in D'_r(a)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{n-m} = \sum_{n=0}^{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} \\ &= \frac{a_0}{(z-a)^m} + \frac{a_1}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{(z-a)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} (z-a)^k}_{=: h(z), h \in \mathcal{H}(D_r(a))} \end{aligned}$$

und $a_0 \neq 0$. Die Behauptung folgt mit $c_k = a_{m-k}$.

2 $\implies$ **3**: Sei $h(z) := f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-a)^k}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) &= \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m \left(h(z) + \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-a)^k} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \underbrace{(z-a)^m}_{\rightarrow 0} \underbrace{h(z)}_{\rightarrow h(a)} + \underbrace{c_1 (z-a)^{m-1}}_{\rightarrow 0} + \dots + c_m (z-a)^{m-m} \\ &= c_m \neq 0. \end{aligned}$$

3 $\implies$ **1**: Aus **Theorem 2.31** hat $g(z) = (z-a)^m f(z)$ eine hebbare Singularität in a . Also ist

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} g(z)$$

mit $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ und

$$g(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) \neq 0.$$

□

Beispiel:

$$f(z) = \frac{z \cos z}{\sin^3 z}.$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3}{\sin^3 z} \cos z = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\sin z} \right)^3 \cos z = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow f$ hat einen Pol 2. Ordnung in $z = a$.

Satz 2.34 (Satz von Casorati-Weierstraß):

Sei $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ sodass a eine wesentliche Singularität von f ist. Dann gilt $\forall r > 0$ mit $D_r(a) \subseteq \Omega$ ist die Menge $f(D'_r(a))$ dicht in $\mathbb{C}$, das heißt

$$\forall w \in \mathbb{C} \forall \varepsilon > 0 \exists z \in D'_r(a) \text{ mit } |f(z) - w| < \varepsilon.$$

Äquivalent: $\forall r > 0$ mit $D_r(a) \subset \Omega$ gilt

$$\overline{f(D'_r(a))} = \mathbb{C}.$$

Beweis (Indirekt). Nehme an $\exists r > 0$ sodass $f(D'_r(a))$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ ist. Dann $\exists w \in \mathbb{C}$ und $\delta > 0$ sodass

$$|f(z) - w| \geq \delta, \quad \forall z \in D'_r.$$

Betrachte

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}, \quad z \in D'_r(a). \quad (2.10)$$

Dann gilt $g \in \mathcal{H}(D'_r(a))$ und $|g(z)| \leq \frac{1}{\delta} \forall z \in D'_r$. Laut **Theorem 2.31** hat g eine hebbare Singularität in a . Bezeichne „wieder“ mit g die Erweiterung von g zu $D_r(a)$.

Fall 1: $g(a) \neq 0$ Aus **Gleichung (2.10)** ist $g(z) \neq 0 \forall z \in D_r(a)$ und daher ist $\frac{1}{g} \in \mathcal{H}(D_r(a))$.

Dann ist $f(z) \stackrel{2.10}{=} w + \frac{1}{g(z)}$, $z \in D'_r(a)$ eine hebbare Singularität in a , ein Widerspruch.

Fall 2: g hat eine Nullstelle der Ordnung $m \geq 1$ in a . Dann $\exists h \in \mathcal{H}(D_r(a))$ mit $h(a) \neq 0$ und $g(z) = (z - a)^m h(z)$, $\forall z \in D_r(a)$. Wegen **Gleichung (2.10)** gilt $h(z) \neq 0$ auf $D_r(a)$ und somit ist $\frac{1}{h} \in \mathcal{H}(D_r(a))$. Wir erhalten

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)} = w + \frac{1}{(z - a)^m} \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z - a)^m} \underbrace{\left(w(z - a)^m + \frac{1}{h(z)} \right)}_{=: \psi(z)}$$

mit $\psi(a) = \frac{1}{h(a)} \neq 0$, $\psi \in \mathcal{H}(D_r(a)) \Rightarrow a$ Pol m -ter Ordnung von f . Widerspruch!
□

Korollar 2.35:

$f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ hat einen Pol in $z = a \iff \lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$.

Beweis. $\implies$: $f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} g(z)$ mit $g \in \mathcal{H}(\Omega), g(a) \neq 0, m \geq 1$. $\implies |f(z)| = \frac{1}{|z-a|^m} |g(z)| \xrightarrow{z \rightarrow a} \infty$.

$\impliedby$: Wegen **Theorem 2.31** ist a keine hebbare Singularität von f . Wegen dem **Satz von Casorati-Weierstraß** ist a keine wesentliche Singularität für f , weil

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty \implies \exists \delta > 0: 0 < |z - a| < \delta \implies |f(z)| \geq 1$$

$\implies f(D'_\delta(a)) \subset \mathbb{C} \setminus D_1(0)$ nicht dicht in $\mathbb{C}$. □

Beispiel:

$f(z) = e^{\frac{-1}{z^2}}$ hat eine wesentliche Singularität in $z = 0$.

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{-1}{n^2}} = e^{-n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

aber

$$f\left(\frac{i}{n}\right) = e^{\frac{-1}{n^2}} = e^{n^2} \rightarrow +\infty.$$

Für $f|_{\mathbb{R}}$ gilt $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, ist $C^\infty(\mathbb{R})$.

Bemerkung: Ein stärkeres Ergebnis als im **Satz von Casorati-Weierstraß** gilt:

Satz (Der große Satz von Picard):

Falls a eine wesentliche Singularität für $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ ist, dann gilt: $\forall r > 0$ mit $D_r(a) \subset \Omega$ ist $f(D'_r(a))$ entweder ganz $\mathbb{C}$ (wie zum Beispiel für $f(z) = \sin \frac{1}{z}$) oder $\mathbb{C}$ mit Ausnahme eines einzigen Punktes (wie für $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, wo 0 nicht angenommen wird).

2.9 Satz der offenen Abbildung

Definition:

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt offene Abbildung, wenn das Bild $f(V)$ jeder offenen Menge $V \subseteq U$ offen ist.

Bemerkung:

$f: A \rightarrow \mathbb{C}$ stetig $\iff \forall O \subseteq \mathbb{C}$ offen ist $f^{-1}(O)$ offen in A .

Korollar 2.36 (zum Maximumprinzip):

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Falls f nicht konstant auf Ω ist und $\exists a \in \Omega$ mit $|f(a)| = \inf_{z \in \Omega} |f(z)|$, dann $\exists w \in \Omega$ mit $f(w) = 0$.

Beweis (Indirekt). Nehme an $f(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$. Dann gilt $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$. Da

$$\sup_{z \in \Omega} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = \sup_{z \in \Omega} \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{\inf_{z \in \Omega} |f(z)|} = \frac{1}{|f(a)|} = \left| \frac{1}{f(a)} \right|,$$

ergibt das Maximumprinzip für $\frac{1}{f}$, dass $\frac{1}{f}$ konstant auf Ω ist. Somit muss auch f konstant sein. Widerspruch! $\square$

Satz 2.37 (Satz der offenen Abbildung):

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{H}(U)$, sodass f nirgends lokal konstant ist. Dann ist f eine offene Abbildung.

Beweis. Sei $Q \subseteq U$ offen und $c \in Q$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $f(Q)$ eine offene Kreisscheibe um $f(c)$ enthält. OBdA $f(c) = 0$, sonst betrachte $z \mapsto f(z) - f(c)$ statt f und bemerke, dass Verschiebungen offener Kreisscheiben offene Kreisscheiben sind. Da f um c nicht konstant ($\equiv 0$) ist, ist c eine Nullstelle endlicher Ordnung (das heißt isolierte Nullstelle). Dann $\exists V$ Kreisscheibe um c mit $\overline{V} \subset Q$ und $f(z) \neq 0 \forall z \in \overline{V} \setminus \{c\}$. Sei $\delta = \frac{1}{2} \min_{z \in \partial V} |f(z)| > 0$. Behauptung: $D_\delta(0) \subseteq f(Q)$. Sei $b \in D_\delta(0)$. Dann gilt für alle $z \in \partial V$.

$$|f(z) - b| \geq |f(z)| - |b| \geq \overbrace{\min_{z \in \partial V} |f(z)|}^{2\delta} - \delta = \delta > |b| = |f(c) - b|,$$

und somit wird $\min_{z \in \bar{V}} |f(z) - b|$ nicht auf ∂V angenommen, das heißt $\exists \lambda \in V$ mit

$$|f(\lambda) - b| = \min_{z \in \bar{V}} |f(z) - b| = \inf_{z \in V} |f(z) - b|.$$

Nach **Theorem 2.36** (angewandt auf $z \mapsto f(z) - b$) $\exists z' \in V$ mit $f(z') - b = 0$, das heißt $b \in f(Q) \implies$ Behauptung. $\square$

Bemerkung:

Der obige **Satz der offenen Abbildung** ist im Allgemeinen falsch für Funktionen die $C^\infty(\mathbb{R})$ sind. Zum Beispiel ist für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$, für das $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ gilt $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$ nicht offen in $\mathbb{R}$.

Satz 2.38:

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{H}(U)$ injektiv. Dann ist $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ holomorph und es gilt

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}, \quad \forall z \in f(U).$$

Insbesondere $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in U$.

Beweis. $f(U)$ ist offen und $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ ist stetig. Sei $Z = \{z \in U: f'(z) = 0\}$. Z hat keinen Häufungspunkt in U . $\implies U \setminus Z$ offen $\implies f(U \setminus Z)$ offen und $f(U \setminus Z) = f(U) \setminus f(Z)$ weil $f: U \rightarrow f(U)$ bijektiv.

Behauptung: $f^{-1}: f(U \setminus Z) \rightarrow U \setminus Z$ holomorph. Sei $b \in f(U \setminus Z)$, $a = f^{-1}(b) \in U \setminus Z \implies f'(a) \neq 0$. Sei $z_n \rightarrow b$, $z_n \in f(U \setminus Z)$, $z_n \neq b$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(z_n) - f^{-1}(b)}{z_n - b} &= \lim_{w_n = f^{-1}(z_n) \rightarrow f^{-1}(b) = a} \frac{w_n - a}{f(w_n) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \\ &\implies (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \quad \forall b \in f(U) \setminus f(Z) \\ &\implies (f^{-1})'(b) f'(f^{-1}(b)) = 1 \quad \forall b \in f(U) \setminus f(Z). \end{aligned} \quad (2.11)$$

$f(Z)$ hat keinen Häufungspunkt in $f(U) \implies \forall z \in f(Z)$ ist hebbare Singularität von $f^{-1} \implies$ **Gleichung (2.11)** gilt überall. $\square$

2.10 Allgemeine Versionen des Cauchy'schen Integralsatzes

Definition:

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ geschlossene Pfade in Ω , $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$. Die formale Summe $\Gamma = m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + \dots + m_n\gamma_n$ heißt **ZYKLUS** in Ω mit Träger $\Gamma^* = \bigcup_{j=1}^n \gamma_j^*$.

Für $f \in C(\Gamma^*)$ sei $\int_{\Gamma} f dz = \sum_{j=1}^n m_j \int_{\gamma_j} f dz$.

$$W_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w-z} dw \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*.$$

Es gilt

$$W_{\Gamma}(z) = \sum_{j=1}^n m_j W_{\gamma_j}(z)$$

$$L(\Gamma) = \sum_{j=1}^n |m_j| L(\gamma_j)$$

Fragestellung: Gegeben eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Kann man die Zyklen $\Gamma \subset \Omega$ charakterisieren, für die

$$\int_{\Gamma} f dz = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}(\Omega) \quad (2.12)$$

gilt?

Bemerkung:

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ ist $f(w) = \frac{1}{w-z}$ holomorph auf Ω . Fall **Gleichung (2.12)** gilt, dann muss

$$0 = \int_{\Gamma} f dw = \int_{\Gamma} \frac{1}{w-z} dw = 2\pi i W_{\Gamma}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega. \quad (2.13)$$

Also ist **Gleichung (2.13)** notwendig für **Gleichung (2.12)**. **Homologie-Version des Cauchy'schen Integralsatzes** zeigt **2.12** $\iff$ **2.13**.

Satz 2.39 (Homologie-Version des Cauchy'schen Integralsatzes):

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, Γ ein Zyklus in Ω mit $W_{\Gamma}(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ (also Γ NULLHOMOLOG in Ω). Dann gilt

$$W_{\Gamma}(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^* \quad (2.14)$$

und

$$\int_{\Gamma} f dw = 0. \quad (2.15)$$

Beweis (Skizze). **Schritt 1:**

$$\begin{aligned}
 0 &= -f(z)W_\Gamma(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^* \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \overbrace{\frac{f(w) - f(z)}{w-z}}^{=:h(z)} dw \\
 &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=:g(z,w)}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Setze

$$\begin{aligned}
 g(z, w) &= \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z \neq w \\ f'(z) & z = w \end{cases} \quad (z, w) \in \Omega \times \Omega \\
 h(z) &= \int_\Gamma g(z, w) dw \quad z \in \Omega
 \end{aligned}$$

$$2.16 \iff h \equiv 0 \text{ auf } \Omega \setminus \Gamma^*.$$

Schritt 2: Behauptung: $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Zuerst zeigen wir, dass g stetig auf $\Omega \times \Omega$ ist.

- In Punkten (z, w) mit $z \neq w$ ist das klar.
- Für Punkte $(a, a) \in \Omega \times \Omega$ folgt die Stetigkeit aus

$$\begin{aligned}
 |g(z, w) - g(a, a)| &= \left| \frac{1}{z-w} (f(z) - f(w)) - f'(a) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{z-w} \int_{[w, z]} f'(r) - f'(a) dr \right| \\
 &\leq \frac{L([w, z])}{|z-w|} \sup_{r \in [w, z]} |f'(r) - f'(a)| \xrightarrow{(w, z) \rightarrow (a, a)} 0
 \end{aligned}$$

da f' stetig in a .

$\Omega \ni z_n \rightarrow z \in \Omega$:

$$|h(z_n) - h(z)| = \left| \int_\Gamma g(z_n, w) - g(z, w) dw \right| \leq L(\Gamma) \sup_{w \in \Gamma} |g(z_n, w) - g(z, w)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist g stetig auf $\Omega \times \Omega$ und somit ist g gleichmäßig stetig auf kompakten Teilmengen von $\Omega \times \Omega$. Daher ist h stetig auf Ω .

Sei nun $\Delta \subset \Omega$ ein Dreieck. Wegen dem Satz von Fubini und dem **Lemma von Goursat**

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Delta} h dz &= \int_{\partial\Delta} \int_\Gamma g(z, w) dw dz \\
 &= \int_\Gamma \underbrace{\int_{\partial\Delta} g(z, w) dz}_{\stackrel{2.12}{=} 0} dw = 0
 \end{aligned}$$

weil $z \mapsto g(z, w)$ eine hebbare Singularität hat in $z = w$, wobei w fest ist. Der **Satz von Morera** ergibt $h \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Schritt 3: Wir zeigen $h \equiv 0$ auf Ω . Sei $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : W_\Gamma(z) = 0\}$ ($(\mathbb{C} \setminus \Omega) \subset \Omega_1$). Ω_1 offen als Vereinigung der Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ wo $W_\Gamma \equiv 0$ gilt. Sei nun

$$h_1(z) = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad z \in \Omega_1.$$

Aus dem Satz von Fubini und dem **Satz von Morera** folgt, dass $h_1 \in \mathcal{H}(\Omega_1)$. Sei

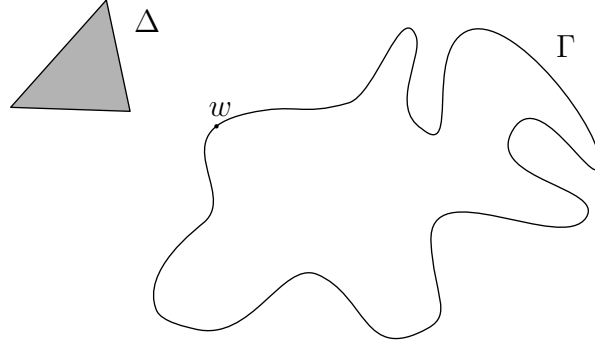


Abbildung 2.23: Schritt 3 Homologie Cauchy

$\Delta \subset \Omega_1 \subset \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. $\Delta \cap \Gamma = \emptyset$, weil Δ, Γ kompakt $|w-z| \geq \text{dist}(\Delta, K) = \delta > 0$ für $w \in \Gamma^*, z \in \Delta$.

$$\int_{\partial\Delta} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw dz = \int_\Gamma f(w) \underbrace{\int_{\partial\Delta} \frac{1}{w-z} dz}_{=0} dw = 0$$

Aus Schritt 1: $h_1(z) = h(z) \quad \forall z \in \Omega \cap \Omega_1$ (da $W_\Gamma(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega \cap \Omega_1$). Laut Voraussetzung $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset \Omega_1$, also $\Omega \cup \Omega_1 = \mathbb{C}$ (da Ω und Ω_1 offen und $\neq \emptyset$ folgt aus $\mathbb{C}$ zusammenhängend, dass $\Omega \cap \Omega_1 \neq \emptyset$).

Dann ist

$$\Phi(z) = \begin{cases} h_1(z) & z \in \Omega_1 \\ h(z) & z \in \Omega \end{cases}$$

wohldefiniert und $\Phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Ω_1 enthält die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ und somit gilt

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow \infty} |\Phi(z)| &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} |h_1(z)| = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \right| \leq \lim_{|z| \rightarrow \infty} L(\Gamma) \max_{w \in \Gamma^*} \frac{|f(w)|}{|w-z|} \\ &\leq L(\Gamma) \max_{w \in \Gamma^*} \frac{|f(w)|}{\text{dist}(z, \Gamma^*)} = L(\Gamma) \max_{w \in \Gamma^*} |f(w)| \frac{1}{\text{dist}(z, \Gamma^*)} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Daher ist $\Phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ beschränkt $\xRightarrow{2.29} \Phi$ konstant $\implies \Phi \equiv 0$ auf $\mathbb{C} \implies h \equiv 0$ auf Ω .

Schritt 4: Wir zeigen, dass Gleichung (2.15) gilt. Sei $a \in \Omega \setminus \Gamma^*$ und betrachte $F(z) = (z - a)f(z)$, $z \in \Omega$. Verwende Gleichung (2.14) auf F für $z = a$:

$$0 = F(a)W_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\overbrace{(w-a)}^{\text{---}} f(w)}{\underbrace{(w-a)}_{\text{---}}} dw. \quad \square$$

Korollar:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sind Γ_1 und Γ_2 Zyklen in Ω mit $W_{\Gamma_1}(z) = W_{\Gamma_2}(z) \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ (also Γ_1, Γ_2 HOMOLOG in Ω), dann gilt

$$\int_{\Gamma_1} f dz = \int_{\Gamma_2} f dz.$$

Satz 2.40 (Laurentreihenentwicklung):

Für $0 \leq r_0 < R_0 \leq \infty$, $a \in \mathbb{C}$ betrachte den Kreisring $D_{r_0, R_0}(a) = \{z \in \mathbb{C} : r_0 < |z - a| < R_0\}$ um a . Falls $f \in \mathcal{H}(D_{r_0, R_0}(a))$, dann ist f in einer Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n, \quad z \in D_{r_0, R_0}(a),$$

entwickelbar, die gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $D_{r_0, R_0}(a)$ konvergiert, und

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_g} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (2.17)$$

wobei $\gamma_g(t) = a + ge^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r_0 < g < R_0$.

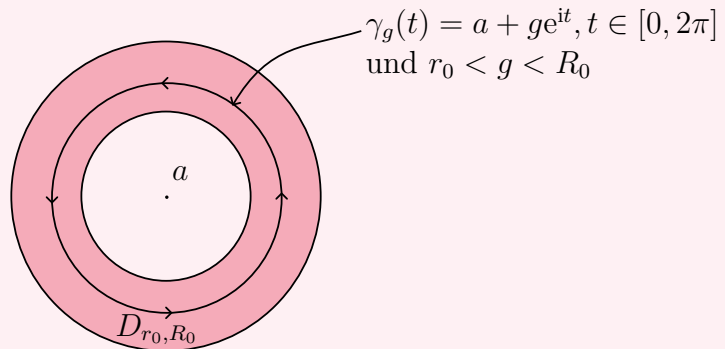


Abbildung 2.24: Kreisring um a und γ_g

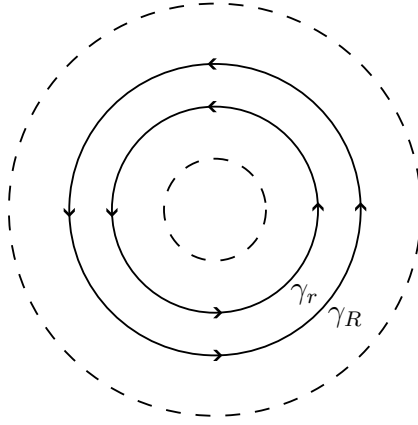


Abbildung 2.25: Beweisskizze Laurentreihenentwicklung

Beweis. Behauptung: Das Integral in [Gleichung \(2.17\)](#) ist unabhängig von $g \in (r_0, R_0)$. Sei $r_0 < r < R < R_0$ und setze $\Gamma = \gamma_R - \gamma_r$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus D_{r_0, R_0}(a)$ gilt

$$W_\Gamma(z) = W_{\gamma_R}(z) - W_{\gamma_r}(z) = \begin{cases} 1 - 1 & |z| \leq r_0 \\ 0 - 0 & |z| \geq R_0 \end{cases} = 0$$

Weiter ist $w \mapsto \frac{f(w)}{(z-a)^{n+1}}$ holomorph in $D_{r_0, R_0}(a)$. Aus [Theorem 2.39](#) folgt nun

$$0 = \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw - \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \implies \text{Behauptung.}$$

Für $z \in D_{r_0, R_0}(a)$ ergibt [Theorem 2.39](#), dass

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z)W_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \\ \iff 2\pi i f(z) &= \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw \end{aligned} \quad (2.18)$$

Genau so wie im Beweis von [Theorem 2.15](#) erhalten wir für das erste Integral oben

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right)}_{=: 2\pi i a_n} \cdot (z-a)^n \text{ für } |z-a| < R, \quad (2.19)$$

wobei die obige Reihe gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $D_R(a)$ konvergiert.

Betrachte jetzt für $|z - a| > r$:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} dw &= \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(z - a) + (a - w)} dw = \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(z - a) \left(1 - \frac{w - a}{z - a}\right)} dw \\
 \frac{|w - a|}{|z - a|} = \frac{r}{|z - a|} < 1: &= \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{z - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w - a}{z - a}\right)^n dw \\
 \text{gleichmäßige Konvergenz:} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - a)^{-n}} dw \right) \frac{1}{(z - a)^{n+1}} \\
 k=n+1: &= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - a)^{(-k)+1}} dw \right)}_{2\pi i a_{-k}} \frac{1}{(z - a)^k} \\
 &= 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - a)^{-k} \quad \forall z: |z - a| > r
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Setze nun $\lambda = \frac{1}{z - a}$. Dann gilt

$$|z - a| > r \iff 0 < |\lambda| < \frac{1}{r}$$

und $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \lambda^k$ konvergiert für $|\lambda| < \frac{1}{r}$. Daher ist ihr Konvergenzradius $\geq \frac{1}{r}$ und somit konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \lambda^k$ gleichmäßig für $|\lambda| \leq \frac{1}{g}$, $\forall g > r$ ($g > r \iff \frac{1}{g} < \frac{1}{r}$). Also konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \frac{1}{(z - a)^k}$ gleichmäßig für $\frac{1}{|z - a|} \leq \frac{1}{g} \iff |z - a| \geq g$. Da r, R mit $r_0 < r < R < R_0$ beliebig waren, folgt nun aus den **Gleichungen (2.18) bis (2.20)**

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n}_{\text{konvergiert gleichmäßig für } |z - a| \leq g_2 < R_0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - a)^{-k}}_{\text{konvergiert gleichmäßig für } |z - a| \geq g_1 > r_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n
 \end{aligned}$$

□

konvergiert gleichmäßig auf $r_0 < g_1 \leq |z - a| \leq g_2 < R_0$.

Beispiel:

1. Für $z \neq 0$:

$$e^z + e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k},$$

also $a_0 = z, a_k = \frac{1}{|k|!}$.

2. $f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z} = \frac{2}{z(z-2)}$. Zwei Singularitäten, $z = 0, z = 2$.

a) $0 < |z| < 2$. Die Laurententwicklung um $z = 0$ ist

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{-2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}.$$

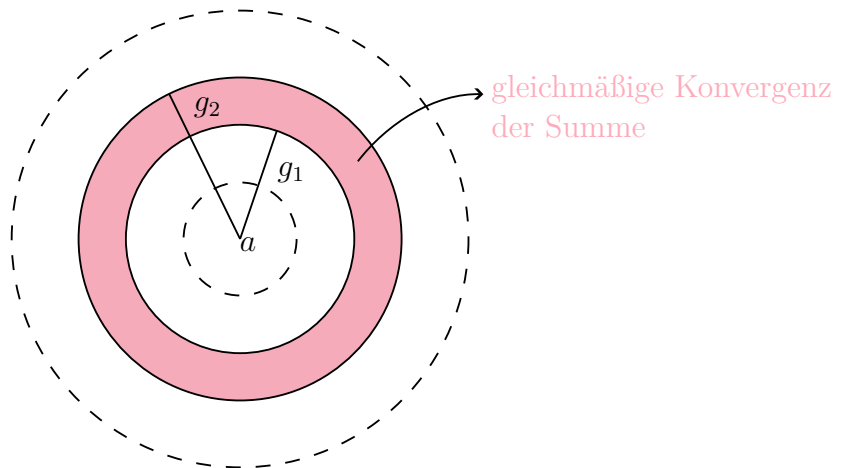


Abbildung 2.26: Konvergenzbereich Laurentreihenentwicklung

$$\text{b) } |z| > 2 \iff \left| \frac{2}{z} \right| < 1.$$

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z} \right)^n \\ &= -\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \underset{k=n+1}{=} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k} \end{aligned}$$

Idee: $\Gamma \subset U$ offen, $f \in \mathcal{H}(U)$, wenn Γ sich nur um endlich viele Singularitäten $b_1, \dots, b_k$ von f windet,

$$\int_{\Gamma} f dz = \sum_{j=1}^k W_{\Gamma}(b_j) \int_{\gamma_j} f dz,$$

wobei

$$\int_{\gamma_j} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - b_j)^n dz = \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z - b_j} a_{-1} = 2\pi i a_{-1}$$

Definition:

Sei $f \in \mathcal{H}(D'_R(a))$, wobei $D'_R(a) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < R\}$ und $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$ die Laurentreihe von f . Der Koeffizient $a_{-1} =: \text{Res}(f, a)$ heißt RESIDUUM von f an der Stelle a .

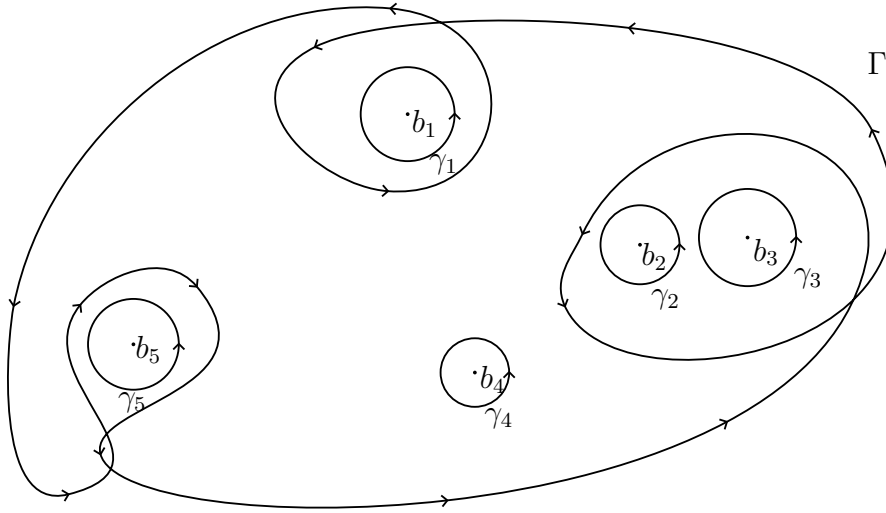


Abbildung 2.27: Singularitäten

Bemerkung:

1. Aus [Theorem 2.40](#) ist $\text{Res}(f, a) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_g} f(w)dw$, wobei $0 < g < R$ und $\gamma_g(t) = a + ge^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
2. Falls a eine hebbare Singularität von f ist, dann gilt

$$\text{Res}(f, a) = 0.$$

In diesem Fall gilt $a_{-k} = 0 \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Satz 2.41 (Residuensatz):

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, f holomorph auf U bis auf endlich viele Singularitäten $b_1, \dots, b_k \in U$. Sei Γ ein Zyklus in $U \setminus \{b_1, \dots, b_k\}$ mit $W_\Gamma(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{U\}$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f dz = \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, b_j) W_\Gamma(b_j).$$

Beweis. Sei r_j mit $D_{r_j}(b_j) \subset U \setminus \Gamma^*$ und sodass

$$D_{r_j}(b_j) \cap D_{r_p}(b_p) = \emptyset \forall j \neq p, 1 \leq j, p \leq k.$$

Sei $\gamma_j(t) = b_j + \frac{r_j}{2} e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Setze

$$\Gamma_1 = \Gamma - \sum_{j=1}^k W_\Gamma(b_j) \gamma_j.$$

Dann gilt $\forall p \in \{1, \dots, k\}$:

$$W_{\Gamma_1}(b_p) = W_{\Gamma}(b_p) - \underbrace{\sum_{j=1}^k W_{\Gamma}(b_j) \overbrace{W_{\gamma_j}(b_p)}^{\delta_{jp}}}_{W_{\Gamma}(b_p)} = 0 \quad (2.21)$$

und $\forall z \in \mathbb{C} \setminus U$

$$W_{\Gamma_1}(z) = \underbrace{W_{\Gamma}(z)}_0 - \sum_{j=1}^k W_{\Gamma}(b_j) \underbrace{W_{\gamma_j}(z)}_{=0} = 0 \quad (2.22)$$

Sei $\Omega = U \setminus \{b_1, \dots, b_k\} \implies \mathbb{C} \setminus \Omega = (\mathbb{C} \setminus U) \cup \{b_1, \dots, b_k\}$. Aus den **Gleichungen (2.21)** und **(2.22)** ist $W_{\gamma_1}(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Nach **Theorem 2.39** gilt

$$0 = \int_{\Gamma_1} f dz = \int_{\Gamma} f dz - \sum_{j=1}^k W_{\Gamma}(b_j) \cdot \int_{\gamma_j} f dz. \quad (2.23)$$

Da $f \in \mathcal{H}(D'_{r_j}(b_j))$ ist f um b_j in einer Laurentreihe entwickelbar, das heißt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - b_j)^n, \quad z \in D'_{r_j}(b_j),$$

wobei hier a_n auch von j abhängen. Es gilt $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z) dz \implies \int_{\gamma_j} f(z) dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \text{Res}(f, b_j)$ für $1 \leq j \leq k$. Verwende das in **Gleichung (2.23)** um die Behauptung zu erhalten $\square$

Satz 2.42:

Falls $a \in \mathbb{C}$ ein Pol m -ter Ordnung von $f \in \mathcal{H}(D'_r(a))$ ist, dann gilt

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} ((z-a)^m f(z)).$$

Beweis. a ist Pol m -ter Ordnung von f . Dann ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c-m}{(z-a)^m} + \dots + \frac{c-1}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k, \quad z \in D'_r(a) \\ \implies (z-a)^m f(z) &= \underbrace{c_{-m} + \dots + c_{-2}(z-a)^{m-2}}_{\left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1}(\dots)=0} + \underbrace{c_{-1}(z-a)^{m-1}}_{\left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1}(\dots)=(m-1)!c_{-1}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^{k+m}}_{\left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1}(\dots)|_{z=a}=0} \\ \implies \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} ((z-a)^m f(z)) &= c_{-1}(m-1)! \quad \square \end{aligned}$$

Korollar 2.43:

Falls $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ ein Pol 1. Ordnung in z_0 hat, wobei $g, h \in \mathcal{H}(D_r(z_0))$ mit $h(z_0) \neq 0$ und $g(z_0) = 0$ ($g'(z_0) \neq 0$) dann gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Beweis. Aus [Theorem 2.42](#) gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} h(z) \underbrace{\frac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)}}_{\rightarrow \frac{1}{g'(z_0)}} = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

□

Beispiel:

$$\gamma(t) = 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

1.

$$I = \int_{\gamma} \underbrace{\frac{1}{(z+1)^2 \sin z}}_{=: f(z)} dz$$

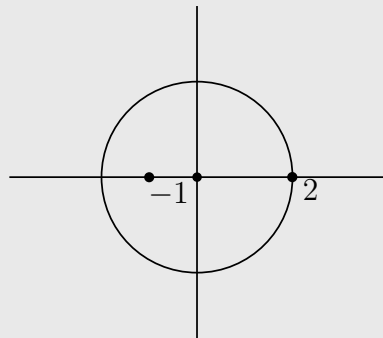


Abbildung 2.28: Residuensatz Beispiel [Punkt 1](#)

$f \in \mathcal{H}(D_3(0) \setminus \{-1, 0\})$. Laut dem [Residuensatz](#) gilt

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i (\operatorname{Res}(f, -1) \overbrace{W_{\gamma}(-1)}^{=1} + \operatorname{Res}(f, 0) \overbrace{W_{\gamma}(0)}^{=1}) \\ &= 2\pi i (\operatorname{Res}(f, -1) + \operatorname{Res}(f, 0)) \end{aligned}$$

- -1 Pol 2. Ordnung $\implies$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, -1) &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{(2-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{2-1} \left(\frac{1}{(z+1)^2 \sin z} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sin z} \right) = -\frac{\cos(-1)}{\sin^2(-1)} = -\frac{\cos 1}{\sin^2 1}\end{aligned}$$

•

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cdot 1}{\sin z (z+1)^2} = 1,$$

da 0 Pol 1. Ordnung ist.

2.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} e^{\frac{1}{z}} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(e^{\frac{1}{z}}, 0\right) = 2\pi i 1 = 2\pi i. \\ e^{\frac{1}{z}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots \\ &\implies \operatorname{Res}\left(e^{\frac{1}{z}}, 0\right) = 1.\end{aligned}$$

2.10.1 Anwendungen

Trigonometrische Integrale

Es sei $R(x, y)$ eine rationale Funktion in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die *stetig auf* $x^2 + y^2 = 1$ ist.

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) dt.$$

Mit $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ und $z = e^{it}$ gilt

$$\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

und somit ist

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) \frac{1}{ie^{it}} \overbrace{e^{i\gamma'(t)}}^{dt} = \int_{\gamma} \underbrace{R\left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right)}_{=: \tilde{R}(z)} \frac{1}{iz} dz$$

Der **Residuensatz** ergibt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \sum_{\substack{w \in D_1(0) \\ w \text{ Singularit\"at von } \tilde{R}}} \operatorname{Res}(\tilde{R}, w) = 2\pi i \sum_{w \in D_1(0)} \operatorname{Res}(\tilde{R}, w), \quad (2.24)$$

wobei

$$\tilde{R}(z) = R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz}.$$

Bemerkung:

Es gilt

$$\sum_{w \in D_1(0)} \operatorname{Res}(\tilde{R}, w) = \sum_{\substack{w \in D_1(0) \\ w \text{ Singularit\"at von } f}} \operatorname{Res}(\tilde{R}, w),$$

weil $\operatorname{Res}(\tilde{R}, w) = 0$ f\"ur alle w mit $\tilde{R}$ holomorph in w .

Beispiel:

Sei $a \in \mathbb{R}, a > 1$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin \theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}} \frac{1}{ie^{i\theta}} \overbrace{e^{i\theta}}^{\gamma'(\theta)} d\theta \\ &= \int_{\gamma} \frac{1}{a + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{1}{iz} dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{2}{2iaz + z^2 - 1} dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{2}{\underbrace{z^2 + 2iaz - 1}_{=: \tilde{R}(z)}} dz \end{aligned}$$

$$\textcolor{violet}{Residuensatz}: = 2\pi i \sum_{w \in D_1(0)} \operatorname{Res}(\tilde{R}, w).$$

$$\begin{aligned} z^2 + 2iaz - 1 = 0 &\iff (z + ia)^2 - (ia)^2 - 1 = 0 \\ &\iff (z + ia)^2 = 1 - a^2 = (-1)\underbrace{(a^2 - 1)}_{>0} \\ &\iff z + ia = \pm i\sqrt{a^2 - 1} \end{aligned}$$

$$z_{1,2} = (-i)(a \pm \sqrt{a^2 - 1})$$

$$z_1 = (-i)(a + \sqrt{a^2 - 1}) \implies |z_1| = a + \sqrt{a^2 - 1} > 1 \implies z_1 \notin D_1(0)$$

$$z_2 = (-i)(a - \sqrt{a^2 - 1}) \implies |z_2|$$

$$|z_2| = a - \sqrt{a^2 - 1} = a - 1 - \sqrt{a^2 - 1} + 1 = \sqrt{a - 1}(\sqrt{a - 1} - \sqrt{a + 1}) + 1 < 1$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(\tilde{R}, z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) \tilde{R}(z) \\
&= \lim_{z \rightarrow z_2} \cancel{(z - z_2)} \frac{2}{(z - z_1) \cancel{(z - z_2)}} \\
&= \frac{2}{z_2 - z_1} = \frac{2}{i2\sqrt{a^2 - 1}} \\
&= \frac{1}{i\sqrt{a^2 - 1}}
\end{aligned}$$

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(\tilde{R}(z_2)) = 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Alternativ:

$$\operatorname{Res}(\tilde{R}, z_2) = \frac{2}{(z^2 + 2iaz - 1)'} \Big|_{z=z_0} = \frac{2}{2z_2 + 2ia} = \frac{1}{z_2 + ia}$$

Uneigentliche Integrale

Wir möchten Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r f(x) dx + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{-s}^0 f(x) dx$$

berechnen, wobei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Sei $H := \{z \in \mathbb{C}: \Im z > 0\}$ die offene obere Halbebene.

Annahmen:

(B1) Es existiert eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $\overline{H} \subset U$, sodass f zu einer auf U bis auf endlich viele Punkte, von denen keiner reell ist, holomorphen Funktion erweiterbar ist.

(B2) Für die erweiterte Funktion gilt: $\exists A, R_0 > 0$ sodass

$$|f(z)| \leq \frac{A}{|z|^{1+\varepsilon}} \text{ für } |z| > R_0 \quad (2.25)$$

Behauptung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{w \in H} \operatorname{Res}(f, w)$$

(eine endliche Summe, da f endlich viele Singularitäten in H hat).

Beweis. Die Existenz von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ folgt aus **Gleichung (2.25)**. Betrachte den Pfad $\Gamma_R = [-R, R] + \sigma_R$, wobei $\sigma_R = Re^{it}$ mit $0 \leq t \leq \pi$.

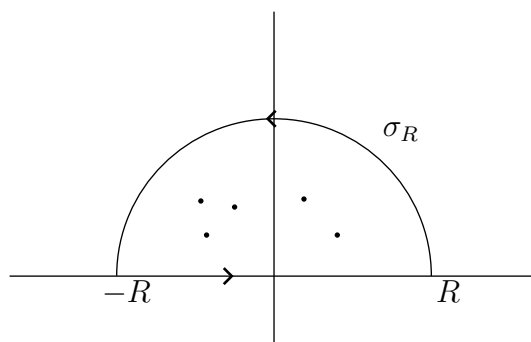


Abbildung 2.29: Skizze uneigentliche Integrale

Für R groß genug liegen alle Singularitäten von f in $D_R(0)$. Laut dem **Residuensatz** ($W_{\Gamma_R} \equiv 0$ auf $\mathbb{C} \setminus U$, weil $\mathbb{C} \setminus U$ in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \Gamma_R^*$ liegt) gilt

$$\int_{[-R, R]} f dz + \int_{\sigma_R} f dz = \int_{\Gamma_R} f(dz) = 2\pi i \sum_{w \in H} \text{Res}(f, w) \quad (2.26)$$

Aus **Gleichung (2.25)** folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma_R} f dz \right| &\leq L(\sigma_R) \max_{z \in \sigma_R^*} \overbrace{|f(z)|}^{\leq \frac{A}{|z|^{1+\varepsilon}}} \\ &\stackrel{2.25}{\leq} \pi R \frac{A}{R^{1+\varepsilon}} = \frac{\pi A}{R^\varepsilon} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Verwende dies in **Gleichung (2.26)**:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f dz = 2\pi i \sum_{w \in H} \text{Res}(f, w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \square$$

Beispiel:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

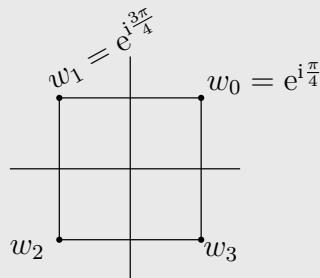


Abbildung 2.30: Skizze

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{w_0, w_1, w_2, w_3\})$$

$$z^4 = -1 = e^{i\pi}$$

$$w_k = e^{(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{4})i}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

und es gilt

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^4 - 1} \leq \frac{1}{|z|^4 - \frac{|z|^4}{2}} = \frac{2}{|z|^4}$$

für $|z| > \sqrt[4]{2}$. f erfüllt **Punkte (B1)** und **(B2)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i \sum_{w \in H} \text{Res}(f, w) = 2\pi i (\text{Res}(f, w_0) + \text{Res}(f, w_1))$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-w_0)(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)}$$

hat einfache Polstellen in $z = w_0, z = w_1$. Mit $g(z) = 1 + z^4$ ist nach **Theorem 2.43**

$$\text{Res}(f, w_k) = \frac{1}{g'(w_k)} = \frac{1}{4w_k^3}, \quad k = 0, 1$$

Also

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left(\frac{1}{4w_0^3} + \frac{1}{4w_1^3} \right) = \frac{\pi i}{2} (e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}) \\ &= \frac{\pi i}{2} \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} i(-i) \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Beispiel:

Betrachte

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\alpha x} dx (=:\hat{g}(-\alpha)),$$

wobei g die Bedingungen (B1) und (B2) erfüllt $\alpha > 0$. Da $|e^{i\alpha z}| = e^{-\alpha \Im z} < e^{\alpha \delta}$ für $\Im z - \delta, \delta > 0$, erfüllt auch

$$f(x) := g(x) e^{i\alpha x}$$

die Bedingungen (B1) und (B2) und somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{w \in H} \text{Res}(g(z) e^{i\alpha z}, w) \quad (2.27)$$

Sei nun $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Für $c \in \mathbb{R}$ setze

$$\hat{f}(c) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-icx}}{1+x^2} dx.$$

Die Substitution $s = -x$ zeigt, dass $\hat{f}(c) = \hat{f}(-c), \forall c \in \mathbb{R}$.

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan|_{-\infty}^{\infty} = \pi.$$

Die Funktion $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ erfüllt die Bedingungen (B1) und (B2). Somit ist

$$\begin{aligned} \hat{f}(c) &= 2\pi i \sum_{w \in H} \text{Res} \left(\frac{e^{-icz}}{z^2 + 1}, w \right) = 2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{-icz}}{(z-i)(z+i)}, i \right) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{e^{-icz}}{(z-i)(z+i)} = 2\pi i \frac{e^{-ic \cdot i}}{2i} = \pi e^c, \end{aligned}$$

weil $e^{-icz} g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{\pm i\})$ und $i \in H$.

$\hat{f}(c) = \pi e^c, c < 0 \xrightarrow{\hat{f}(-c)=\hat{f}(c)} \hat{f}(c) = \pi e^{-|c|} \forall c \in \mathbb{R}$. (Kommentar: Die Funktion $\hat{f}$ ist die Fouriertransformation von $x \mapsto \frac{1}{x^2+1} (x \in \mathbb{R})$)

Satz 2.44 (Satz von Rouché):

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und γ ein geschlossener Pfad in Ω , sodass $W_\gamma: \mathbb{C} \setminus \gamma^* \rightarrow \{0, 1\}$ und $W_\gamma(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Sei ferner $I = \{z \in \Omega: W_\gamma(z) = 1\}$.

1. (Anzahlformel für Nullstellen) Falls $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und f auf γ^* keine Nullstellen

hat, dann gilt

$$\tilde{N}_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz,$$

wobei $\tilde{N}_f$ die Anzahl der Nullstellen (Vielfachheiten miteinberechnet) von f in I ist.

2. (Satz von Rouché) Falls $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ und

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \gamma^* \quad (2.28)$$

gilt, dann haben f und g gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheiten miteinberechnet) in I (das heißt $\tilde{N}_f = \tilde{N}_g$).

Beweis. **1:** Sei $A = \{a \in I : f(a) = 0\}$. Bemerke, dass A endlich sein muss, sonst hätte $N(f)$ einen Häufungspunkt λ in der kompakten Menge $\bar{I}$. Da $I \subset \Omega$ und $\partial I \subseteq \gamma^* \subset \Omega$ gilt $\bar{I} \subset \Omega$. Daher ist $\lambda \in \Omega$. Laut **Theorem 2.20** müsste $f \equiv 0$ auf Ω gelten (Widerspruch zu $f \neq 0$ auf γ^*).

Falls $a \in A$ eine Nullstelle der Ordnung $m(a) \geq 1$ für f ist, dann $\exists h \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $h(a) \neq 0$, sodass

$$f(z) = (z - a)^{m(a)} h(z), \quad z \in \Omega.$$

Dann $\exists r > 0$ mit $h(z) \neq 0 \quad \forall z \in D_r(a)$ und somit ist $\frac{1}{h} \in \mathcal{H}(D_r(a))$. Es gilt für $z \in D_r(a)$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(a)(z - a)^{m(a)-1} h(z) + (z - a)^{m(a)} h'(z)}{(z - a)^{m(a)} h(z)} = \frac{m(a)}{z - a} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

wobei $\frac{h'}{h} \in \mathcal{H}(D_r(a))$. Daraus folgt $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m(a)$. Nach dem **Residuensatz**

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \sum_{a \in A} \text{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = \sum_{a \in A} m(a) = \tilde{N}_f$$

2: **Gleichung (2.28)** $\implies f(z) \neq 0$ und $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in \gamma^*$. Daher ist $f := \frac{g}{f}$ holomorph mit $F(z) \neq 0$ auf einer offenen Umgebung von γ^* . Dann definiert $\Gamma(t) := F(\gamma(t))$, $a \leq t \leq b$ ($\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$) einen geschlossenen Pfad in $\mathbb{C}$. Wegen **Gleichung (2.28)** gilt

$$|1 - \Gamma(t)| = \left| 1 - \frac{g}{f}(t) \right| < 1, \quad a \leq t \leq b,$$

das heißt $\Gamma^* \subset D_1(1)$.

$$\begin{aligned} 2\pi i(\tilde{N}_g - \tilde{N}_f) &\stackrel{1}{=} \int_{\gamma} \frac{g'}{g} dz - \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \int_{\gamma} \frac{g'f - f'g}{f^2} \frac{1}{\frac{g}{f}} dz = \int_{\gamma} \frac{\left(\frac{g}{f}\right)'}{\frac{g}{f}} dz = \int_{\gamma} \frac{F'}{F} \\ &= \int_a^b \frac{F'(\gamma(t))\gamma'(t)}{F(\gamma(t))} dt = \int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = W_{\gamma}(0) = 0 \end{aligned} \quad \square$$

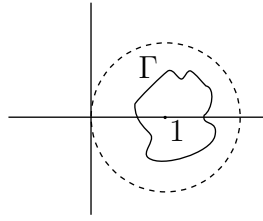


Abbildung 2.31: Rouché

Beispiel:

$p(z) = z^5 + 10z - 3$. Finde die Anzahl der Nullstellen von p in

1. $D_2(0)$,
2. $D_1(0)$,
3. $B_{1,2} = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$.

Punkt 1: Sei $\gamma_2(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Sei $q(z) = z^5$. Für $z \in \gamma_2^*$, das heißt $|z| = 2$ gilt

$$|p(z) - q(z)| = |10z - 3| \leq 10|z| + 3 = 23 < 2^5 = |z^5| = |q(z)| \quad (2.29)$$

$\stackrel{2.44}{\implies}$ p hat in $D_2(0)$ gleichviele Nullstellen wie q , das heißt 5.

Punkt 2: $\gamma_1(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Sei $r(z) = 10z$. Für $|z| = 1$ gilt

$$|p(z) - r(z)| = |z^5 - 3| \leq |z|^5 + 3 = 4 < 10 = |10z| = |r(z)|. \quad (2.30)$$

Laut dem **Satz von Rouché** hat p in $D_1(0)$ gleich viele Nullstellen wie r , das heißt 1.

Punkt 3: Wegen **Gleichungen (2.29) und (2.30)** hat p keine Nullstellen mit $|z| = 1$ oder $|z| = 2$. Aus **Punkte 1 und 2** $\implies$ p hat genau $5 - 1 = 4$ Nullstellen in $B_{1,2}$.

Beispiel (2. Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra):

Beweis. Sei $p(z) = a_n z^n + \dots a_1 z + a_0$ $a_n \neq 0, n \geq 1$. Für $R > 0$ groß genug gilt

$$|p(z) - a_n z^n| = |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| < |a_n z^n|$$

für $|z| = R$ weil

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n-1}z^{n-1} + \dots a_1z + a_0}{a_n z^n} \right| &\leq \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \frac{1}{|z|} + \dots + \frac{|a_1|}{|a_n|} \frac{1}{|z|^{n-1}} + \frac{|a_0|}{|a_n|} \frac{1}{|z|^n} \\ &= \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \frac{1}{R} + \dots + \frac{|a_0|}{|a_n|} \frac{1}{R^n} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Laut dem **Satz von Rouché** hat p gleich viele Nullstellen wie $a_n z^n$ in $D_R(0) \forall R > 0$ groß genug $\implies p$ hat genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$. $\square$

Benannte Sätze

Satz 2	Satz von Looman-Menchoff	14
Satz 1.7	Kriterium von Cauchy	18
Satz 1.8	Majorantenkriterium von Weierstraß	18
Satz 1.9	Satz von Cauchy-Hadamard	19
Satz 3	Eigenschaften	25
Satz 4	Theorem 1.11 „revisited“	40
Satz 5	Jordan’scher Kurvensatz	41
Satz 2.12	Lemma von Goursat	50
Satz 2.13	Integralsatz von Cauchy für Sterngebiete	53
Satz 2.14	Die Cauchy’sche Integralformel	53
Satz 2.15	Taylorentwicklung	55
Satz 2.17	Die Cauchy’sche Formel für Ableitungen	57
Satz 2.18	Satz von Morera	59
Satz 2.21	Identitätssatz für holomorphe Funktionen	61
Satz 2.28	Cauchy’sche Abschätzungen	65
Satz 2.29	Satz von Liouville	65
Satz 2.30	Weierstraß’scher Konvergenzsatz	66
Satz 2.34	Satz von Casorati-Weierstraß	71
Satz 6	Der große Satz von Picard	72
Satz 2.37	Satz der offenen Abbildung	73
Satz 2.39	Homologie-Version des Cauchy’schen Integralsatzes	75
Satz 2.40	Laurentreihenentwicklung	78
Satz 2.41	Residuensatz	82
Satz 2.44	Satz von Rouché	90

Abbildungsverzeichnis

1.1	Komplex konjugierte Zahl	4
1.2	Polardarstellung	4
1.3	Unterschiedliche Grenzwerte von Arg	4
1.4	Projektionsskizze	7
1.5	Tangentialvektor einer Kurve	16
1.6	Winkel zwischen Tangentialvektoren	16
1.7	Winkeltreue	17
1.8	Konvergenzradien	20
1.9	bijektive Abbildung auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$	28
1.10	S_α und R_α	28
2.1	Einheitskreis	31
2.2	$[z, w]$	31
2.3	Streckenweg	32
2.4	Komposition zweier Pfade	33
2.5	Konstruktion geschlossener Pfad	37
2.6	Beispiel für ein Sterngebiet	38
2.7	Skizze Theorem 2.10	43
2.8	2.11 Beispielkurve 1	45
2.9	2.11 Beispielkurve 2	46
2.10	2.11 Beispielkurve 3	46
2.11	2.11 Beispielkurve 4	47
2.12	Pfad mit endlich vielen Schnittpunkten mit negativer x -Achse	47
2.13	Möglichkeit 1	48
2.14	Möglichkeit 2	49
2.15	Möglichkeit 3	49
2.16	Möglichkeit 4	50
2.17	Zerlegung von Δ	50
2.18	Zerlegung 1	52
2.19	Zerlegung 2	53
2.20	Definitionen für $\sigma_1, \sigma_2, \mu_1, \mu_2, \alpha, \beta$	57
2.21	Γ_1	58
2.22	Skizze 2.30	67
2.23	Schritt 3 Homologie Cauchy	77
2.24	Kreisring um a und γ_g	78
2.25	Beweisskizze Laurentreihenentwicklung	79
2.26	Konvergenzbereich Laurentreihenentwicklung	81
2.27	Singularitäten	82
2.28	Residuensatz Beispiel Punkt 1	84

2.29 Skizze uneigentliche Integrale	88
2.30 Skizze	89
2.31 Rouché	92